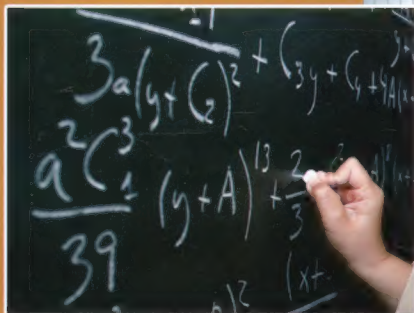
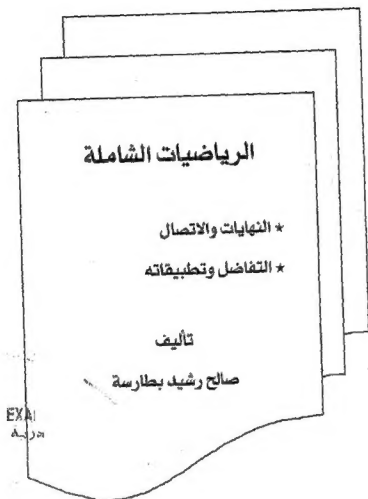


الرياضيات الشاملة

النهايات والاتصال
التفاضل وتطبيقاته

صالح رشيد بطارسة





دار أسامة للنشر والتوزيع
الأردن - عمان

الناشر
دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

• هاتف: 5658252 - 5658253

• فاكس: 5658254

• العنوان: العبدلي - مقابل البنك العربي

ص. ب: 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة. - عمان: دار أسامة

للنشر والتوزيع، 2013.

() ص.

ر. ا: (2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

٧	المقدمة
٩	تنويه

النهايات والاتصال

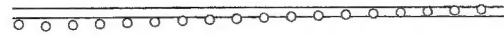
١٣	(٢٠ - ١) النهاية Limit
١٧	(٢٠ - ٢) خواص النهايات وطرق إيجادها
١٧	وحدانية النهاية
١٧	العمليات الثلاث
١٨	نهاية الاقتران الثابت = نفسه
١٨	نهاية الاقتران الخطي
١٨	نهاية الاقترانات التي تشمل س جذور بمختلف الأدلة
١٩	نهاية الاقترانات التي تحتوي أسس حقيقية أو قوى
١٩	نهاية بعض الاقترانات الحقيقية في المالا لنهاية
٢٣	نهاية الاقترانات الجبرية
٢٤	نهاية كثيرات الحدود
٢٤	نهاية الاقتران المتشعب
٢٦	نهاية اقتران القيمة المطلقة

نهاية اقتران أكبر عدد صحيح [س] أو الاقتران السلمي أو الدرجي	٣٠
نهاية الاقتران النسبي أو نهايته خارج قسمة اقترانين	٣٣
نهاية الاقترانات الدائرية (المثلثية)	٣٩
نظرية الشطيرة:	٤٣
Continuity (٢ - ٢٠) الاتصال	٤٦
نظريات في الاتصال:	٥٩
أمثلة محلولة على النهايات والاتصال	٦٥
أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين	٨٢

التفاضل وتطبيقاته

Average of Change متوسط التغير (١ - ٢١)	١٠٣
The First Derivative المشتقة الأولى (٢ - ٢١)	١٠٧
Differentiation Rules قواعد الاشتقاق (٣ - ٢١)	١١٠
مشتقة مجموع اقترانين أو فرقهما	١١٢
مشتقة حاصل ضرب اقترانين:	١١٣
مشتقة خارج قسمة اقترانين	١١٤
مشتقة اقتران القيمة المطلقة	١١٥
مشتقة صحيح	١١٧
مشتقة الجذر التربيعي	١١٨

١١٩	Higher Derivatives المشتقات العليا
١٢٠	Derivctive of compo.site Function مشتقة الاقتران المركب
١٢٣	مشتقة الاقتران الوسيط
١٢٤	Implicit Ditterentiation الاشتقاق الضمني واستخداماته
١٢٦	Derivatives of trigonometrical Functions مشتقات الاقترانات الدائرية
١٣٠	مشتقة الاقتران الأس الطبيعي
١٣١	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي
١٣٤	(٢١ - ٤) تطبيقات التفاضل
١٣٤	التطبيقات الهندسية للمستقيم الأولى:
١٣٧	التطبيقات الفيزيائية للمشتقة الأولى ق (س) والثانية ق (س)
١٣٧	Instantaneous velocity أو Speed السرعة اللحظية
١٣٨	Acceleration التسارع اللحظي
١٤٠	Related Rates المعدلات المرتبطة بالزمن
١٤٤	إشارة المشتقة الأولى ق (س).
١٤٤	Critical Point النقطة الحرجة
١٤٥	مجالات
١٤٩	Extreme Values القيم القصوى
١٥٩	إشارة المشتقة الثانية ق (س):
١٦٠	Concavity التقعر



١٦٢	نقطة الانعطاف:
١٦٨	استقراء الرسم Graphing Induction
١٧٤	سادساً: مسائل على القيم القصوى
١٧٧	سابعاً: التطبيقات الاقتصادية على التفاضل
١٨١	أمثلة محلولة على التفاضل
٢٠٤	أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

المقدمة

بعد الاتكال على الله،،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلا أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرضى... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلف من البشر،

لذا لا بُدّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقدرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروح، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُسمى الذكاء وتُشدَّب الأخلاق وتسمو بالإنسان إلى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).
- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالتبغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج إلى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.
- هيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختتم على ذلك بقولنا آمين!...

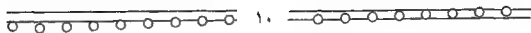
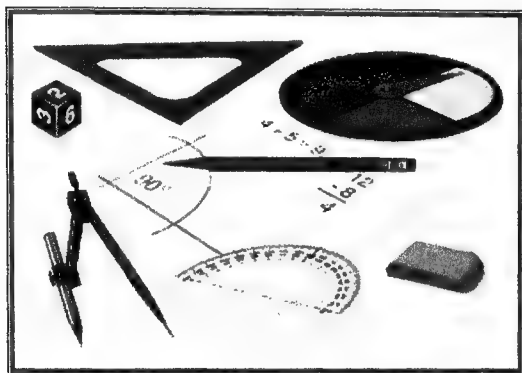
المؤلف

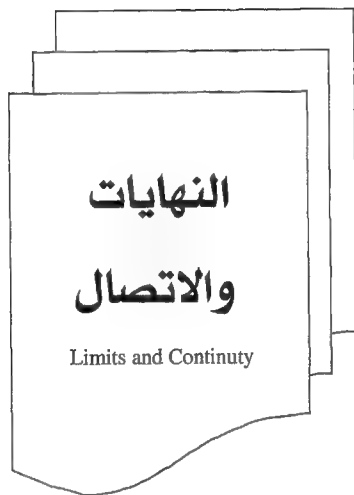
تنويه

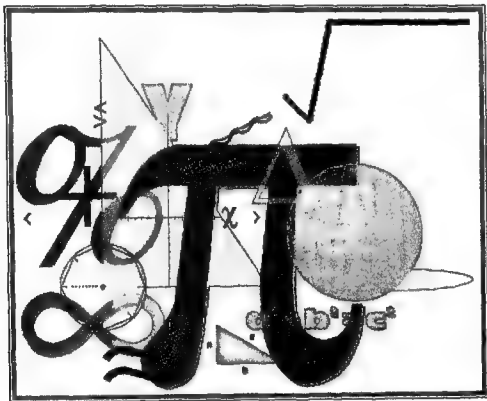
في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملاحظة
منذ البداية فأقول:

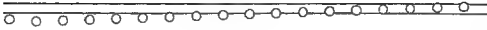
بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا
استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات
الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة
التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف









(٢٠ - ١) النهاية Limit:

إذا كانت قيمة المتغير s لا تساوي العدد الحقيقي a ، فإن قيمته تكون أكبر من a أو أصغر منه ويمكن أن تقترب قيمة المتغير s من a قريباً كافياً بحيث لا تزيد عن a أو تقل عنه إلا بمقدار موجب وضئيل جداً، عندها نقول أن قيمة s تقترب من a .

فإذا كانت قيمة s أكبر من a وبدأت تقل حتى تصل a فإننا نقول أن قيمة s تقترب من a من اليمين ونعبر عن ذلك بالرموز: $s \rightarrow a^+$

وإذا كانت قيمة s أصغر من a وبدأت تزداد حتى تصل a فإننا نقول أن قيمة s تقترب من a من اليسار ونعبر عن ذلك بالرموز: $s \rightarrow a^-$
كما في الشكل:



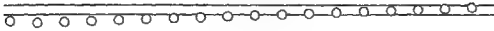
وإذا ما ارتبط هذا الاقتراب بالاقتران كما يلي:

عندما s تقترب من a من اليمين فإن قيمة الاقتران $f(s)$ تقترب من العدد الحقيقي: $k = f(a)$.

نمبر عن ذلك بالرموز: $f(s) \rightarrow k$ (تقريباً)
عندما تقترب s من a

وفي النهاية سواء أكان الاقتراب من اليمين أم اليسار فإن قيمة s تساوي a وهنا فإن قيمة الاقتران $f(s)$ تساوي k حيث $k = f(a)$
يُعبّر عن ذلك وبالحالتين كما يلي:
(١) إذا كان الاقتراب من اليمين = الاقتراب من اليسار
(بالنسبة للمتغير s)

النهايات والاتصال



بالرموز: إذا كان نها ق(س) = نها ق(س) = ك أو ق(أ)

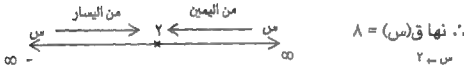
فإن نها ق(س) = ك أو ق(أ)

مثال: إذا كان ق(س) = س^٢ أوجد نها ق(س) (إن وجدت)

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها س}^2 \text{ ق(٢)} = ٨$$

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها س}^2 \text{ ق(٢)} = ٨$$

$$\text{وبما أن: نها ق(س)} = \text{نها ق(س)} = ٨$$



هذا ويمكن إيجاد نها ق(س) مباشرة بالتعويض المباشر هكذا:

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها ق(س)} = ٨ \text{ كون ق(س) كثير حدود.}$$

(٢) أما إذا كان الاقتراب من اليمين \neq الاقتراب من اليسار

(بالنسبة للمتغير س)

وبالرموز:

$$\text{إذا كان نها ق(س)} \neq \text{نها ق(س)}$$

فإن نها ق(س) غير موجودة ولا تساوي ك = ق(أ) إطلاقاً.



أوجد نها ق(س) (إن وجدت)

من اليمين ← من اليسار →

س ٢

الحل:

تعریفه

وَمَا أَنْ نَهَاقَ (س) ≠ نَهَاقَ (س)

وبشكل عام: مما سبق نلاحظ أنه لتحديد النهاية عندما تؤول قيمة s إلى

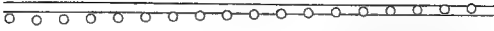
يمین یسار

ولتحديد النهاية من اليسار من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً حول أ

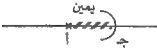
ومن اليسار بفترة مفتوحة قصيرة الطول جداً على الشكل (ج، أ)

ولتحديد النهاية من اليمين من الضروري أن يكون الاقتران معرّفاً حول أ

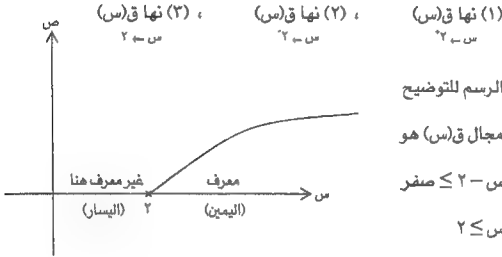
النهايات والاتصال



ومن اليمين بفترة قصيرة الطول جداً على الشكل (أ)، (ج)



كمثال: إذا كان ق(س) = $\sqrt{2-s}$ أوجد إن أمكن كلاً من



ومن الشكل نلاحظ أن ق(س) غير معرف على يسار العدد 2 وإنما على

اليمين فقط أي أن:

$$\text{نها ق(س)} = \sqrt{2-s} = \sqrt{2-2} = \text{صفر «تعويض مباشر»}$$

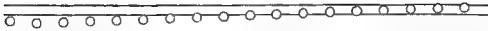
$$\text{نها ق(س)} = \text{غير موجودة لأن ق(س) غير معرف على يسار العدد 2}$$

«ومن هذه وتلك» فإن:

$$\text{نها ق(س) غير موجودة لأن النهاية من اليسار غير موجودة}$$

لهذا السبب النهاية غير موجودة في الأطراف لأن العدد 2 إذا كان طرفاً في الفترة فإن الاقتران غير معرف على فترة مفتوحة قصيرة الطول من اليسار أو اليمين





وإنما يكون معرفاً على اليمين مثلاً وليس على اليسار (كما في الشكل أعلاه) أو يكون معرفاً على اليسار مثلاً وليس على اليمين.

(٢٠ - ٢) خواص النهايات وطرق إيجادها

سنورد فيما يلي البعض من هذه الخواص على شكل نظريات Limits Theorems بلا براهين ولا إثباتات وإنما نوضحها بالأمثلة فقط، حتى يتسنى لجميع الدارسين والدارسات الإلمام بها بسهولة وبلا غموض ولا تعقيد، ومن خلال السياق سنعرض طرق إيجاد هذه النهايات المتعلقة بالافتراضات الجبرية والدائرية (المثلثية) بشيء من التفصيل المفيد وبدون تطويل، أكيد!!!

كما يلي:

(نظرية ١): «وحدانية النهاية»

إذا وجدت النهاية فهي وحيدة لا ثاني لها على الإطلاق

فإذا كان نها ق(س) = $\lim_{s \rightarrow a} l$ ، وكان نها ق(س) = $\lim_{s \rightarrow a} k$

فإن $l = k$ حيث أ، ل، ك أعداد حقيقية.

«مفهوم هذه النظرية واضحة للعيان وتحصيل حاصل ومن البراهين»

(نظرية ٢): (العمليات الثلاث) «جمع وطرح وضرب النهايات»

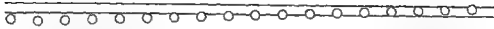
ليكن نها ق(س) = $\lim_{s \rightarrow a} l$ ، ونها ه(س) = $\lim_{s \rightarrow a} k$

لكل أ، ل، ك أعداد حقيقية فإن:

(١) نها [ق(س) \pm ه(س)] = $\lim_{s \rightarrow a} l \pm k$ «جمع وطرح النهايات»

(٢) نها [ق(س) . ه(س)] = $\lim_{s \rightarrow a} l . k$ «ضرب النهايات»

النهايات والاتصال



وكذلك نها م. ق (س) = م. ل حيث م عدد حقيقي «ضرب النهاية بعدد»
 $\text{س} \leftarrow 1$

(نظرية ٣): نهاية الاقتران الثابت = نفسه

ليكن ق (س) = ج ، ج عدد ثابت

فإن نها ق (س) = ج نفس القيمة
 $\text{س} \leftarrow 1$

وهذا يعني أن نهاية الاقتران الثابت عندما تقترب س من أي عدد حقيقي مثل

أ تساوي ج العدد نفسه.

أي أن نها ج = ج ، نها $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ وهكذا
 $\text{س} \leftarrow 1$

(نظرية ٤): نهاية الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب حيث أ، ب أعداد حقيقية، أ ≠ صفر

نستطيع إيجاد نهاية الاقتران الخطي وجميع كثيرات الحدود بالتعويض

المباشر توفيراً للوقت والجهد هكذا:

ليكن ق (س) = س ← فإن نها ق (س) = ق (س)
 $\text{س} \leftarrow 1$

أي أن نها (٣ س + ٢) = ق (٢ -) + ٢ = ٤ - وهكذا.
 $\text{س} \leftarrow 1$

(نظرية ٥): نهاية الاقترانات التي تشمل على جذور بمختلف الأدلة

علمًا بأن $\sqrt[n]{x}$ الجذر التربيعي دليله = ٢

$\sqrt[n]{x}$ الجذر التكعيبي دليله = ٣

$\sqrt[n]{x}$ الجذر النوني دليله = ن عدد طبيعي

ليكن أ < صفر ، ن عدد صحيح موجب زوجي وفردى لجميع الأدلة

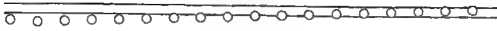
أو أ > صفر ، ن عدد صحيح موجب زوجي وفردى فقط (حالة خاصة)

للأدلة الفردية

وكانت نها ق (س) = ل
 $\text{س} \leftarrow 1$



النهايات والاتصال



من الرسم:

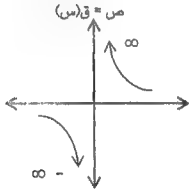
نها $\frac{1}{s}$ = صفر (عندما يقترب ق(س) من محور السينات الموجب قريباً
 $s \rightarrow \infty$)
 كافياً وكأنه يقطعه!!!)

وكذلك نها $\frac{1}{s}$ = صفر (عندما يقترب ق(س) من محور السينات السالب
 $s \rightarrow -\infty$)
 قريباً كافياً وكأنه يقطعه!!!)

وبما أن نها $\frac{1}{s}$ = نها $\frac{1}{s}$ وبشكل عام:
 $s \rightarrow \infty$ $s \rightarrow -\infty$

نها $\frac{1}{s}$ = صفر حيث أ عدد حقيقي موجب، η عدد طبيعي.
 $s \rightarrow \infty$ $s \rightarrow -\infty$

مثال: في هذا السياق لابد من توضيح كلاً من الحالتين التاليتين:



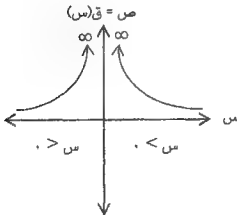
الأولى: ومن الرسم:

نها $\frac{1}{s}$ = $\frac{1}{s}$ ، نها $\frac{1}{s}$ = $\frac{1}{s}$
 $s \rightarrow \infty$ $s \rightarrow -\infty$

نها $\frac{1}{s}$ غير موجودة
 $s \rightarrow 0$

الثانية:

ق(س) = $\frac{1}{s}$ ، $s \neq$ صفر
 من الرسم

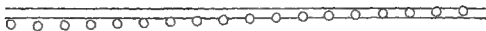


نها $\frac{1}{s}$ = $\frac{1}{s}$ ، نها $\frac{1}{s}$ = $\frac{1}{s}$
 $s \rightarrow \infty$ $s \rightarrow -\infty$

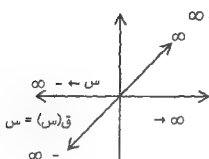
نها $\frac{1}{s}$ = $\frac{1}{s}$
 $s \rightarrow 0$



النهايات والاتصال



مثال: نها: $\frac{0}{s} = \infty$ ، وكذلك نها $\frac{0}{s} = -\infty$



والآن نها $s = -\infty$ وكذلك نها $s = \infty$

والشكل يوضح ذلك

وكذلك

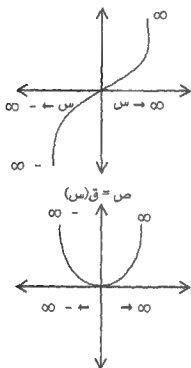
نها $s = \infty$ ، $\frac{1}{s} = 0$

نها $s = -\infty$ ، $\frac{1}{s} = 0$

لكن نها $s = \infty$ ، $\frac{1}{s} = 0$

وكذلك نها $s = -\infty$ ، $\frac{1}{s} = 0$

كما في الشكل



وبشكل عام هنالك حالتان هما:

نها $s = \infty$ ، عدد حقيقي موجب
نها $s = -\infty$ ، عدد حقيقي سالب

كون $s = \frac{1}{s}$ ، $s \neq 0$

وكذلك: نها $s = \infty$ ، عدد زوجي ، $2 \leq$
نها $s = -\infty$ ، عدد فردي ، $1 \leq$

ومن جميع ما سبق يمكن الآن حساب نهاية اقتران نسبي عندما تؤول س إلى ∞ أو إلى ∞ كما يلي:

إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً، يمكن كتابة قاعدته على الصورة

$$\text{ق(س)} = \frac{ا_0 س^0 + ا_1 س^1 + \dots + ا_n س^n}{ب_0 س^0 + ب_1 س^1 + \dots + ب_m س^m}$$

وبإخراج العامل س 0 في البسط وإخراج العامل س r في المقام، يؤول الاقتران إلى:

$$\text{ق(س)} = \frac{\{ا_0 س^0 + ا_1 س^1 + \dots + ا_n س^n\}}{\{ب_0 س^0 + ب_1 س^1 + \dots + ب_m س^m\}}$$

$$\text{وعندما س} \leftarrow \infty \text{ فإن المقادير } \frac{ا_0 س^0}{س^0}, \dots, \frac{ا_n س^n}{س^n} \text{ والمقادير } \frac{ب_0 س^0}{س^0}, \dots, \frac{ب_m س^m}{س^m}$$

جميعها بلا استثناء تؤول إلى الصفر وعليه فإن

نها ق(س) = نها $\frac{ا_0 س^0}{ب_m س^m}$ وهكذا بشكل عام يعطي النتيجة التالية

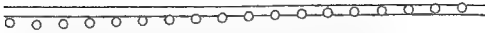
لإيجاد نهاية الاقترانات النسبية في الملائمة، فإننا نأخذ الحد الأعلى درجة في البسط والحد الأعلى درجة في المقام كما يلي:

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها } \frac{ا_0 س^0}{ب_m س^m} \text{ فقط.}$$

حيث م، 0 عددان طبيعيين

وينطبق الكلام عندما تؤول س إلى ∞ أيضاً

النهايات والاتصال



وينشأ من جراء ذلك الحالات الثلاث التالية، لإيجاد نهاية الاقتران النسبي في المالا نهاية كما يلي:

الأولى: عندما تكون درجة البسط في الاقتران النسبي أصغر من درجة المقام، فنهايته تساوي صفر.

$$\text{هكذا: نها} = \frac{1 + s - 2s^2}{7 + 5s + 3s^2} \quad \text{نها} = \frac{2s^2}{3s^2} \quad \text{نها} = \frac{1}{3}$$

$$\text{نها} = \frac{2}{3} = \text{صفر} \quad \left\{ \text{تطبيقاً على نها} \frac{1}{3} \right\}$$

الثانية: عندما تكون درجة البسط في الاقتران النسبي تساوي درجة المقام

$$\text{فنهايته تساوي عدداً حقيقياً} = \frac{\text{مماثل البسط}}{\text{مماثل المقام}}$$

$$\text{هكذا: نها} = \frac{3 - 2s + 5s^2}{7 + 5s + 3s^2} = \frac{3 - 2s + 5s^2}{3 - 2s + 5s^2} = 1$$

$$\left\{ \text{تطبيق على نهاية الثابت} = \text{نفسه} \right\}$$

الثالثة: عندما تكون درجة البسط في الاقتران النسبي أكبر من درجة المقام

$$\text{فنهايته تساوي} \pm \infty$$

$$\text{هكذا: نها} = \frac{4 - 2s + 5s^2}{5 - 3s - 2s^2} = \frac{4s^2}{-2s^2} = -2$$

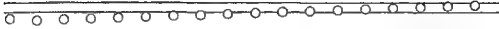
$$\infty = \text{كون } s^1 \text{ درجته فردي}$$

(نظرية ٨): نهاية الاقترانات الجبرية:

سنورد فيما يلي كيفية إيجاد نهاية الاقترانات الجبرية التالية:



النهايات والاتصال



(١) نهاية كثيرات الحدود:

ويتم إيجاد النهاية كما أسلفنا بطريقة التعويض المباشر، علماً بأن التعويض المباشر هو الطريقة الوحيدة لإيجاد قيمة الاقتران بشكل عام عند أي نقطة في مجاله دون تبسيط أو اختصار.

وكان القيمة والنهاية عند أي نقطة في مجاله يمكن إيجادها بالتعويض المباشر.

$$\text{كمثال: إذا كان ق(س) = س}^2 - ٥س + ٣$$

$$\text{فإن نها ق(س) = ق(٢) = (٢) - ٥(٢) + ٣ = -٣ / النهاية}$$

$$\text{وكذلك القيمة: ق(٢) = (٢) - ٥(٢) + ٣ = -٣ / القيمة}$$

أي أن النهاية = القيمة

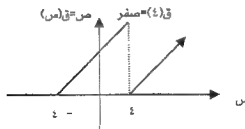
(٢) نهاية الاقتران المتشعب:

والاقتران المتشعب هو الاقتران المعروف على قاعدتين أو أكثر وهنا نحتاج الرسم للتوضيح والنهاية من اليمين واليسار عندما نجد النهاية عند نقطة التغيير بالتعريف.

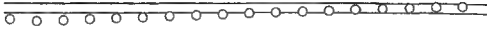
$$\text{كمثال: إذا كان ق(س) = } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} - ٤, \text{ س} \leq ٤ \\ \text{س} + ٤, \text{ س} > ٤ \end{array} \right.$$

$$\text{أوجد نها ق(س)، نها ق(س)، نها ق(س)}$$

استعانة بالرسم المجاور الذي يمثل منحنى ق(س)



النهايات والاتصال



نها ق(س) = نها (س - ٤) كون $٤ < ٥$ (القاعدة الأولى)

$$١ = ٤ - ٥ =$$

نها ق(س) = نها (س + ٣) كون $٤ > ٣$ (القاعدة الثانية)

$$٧ = ٤ + ٣ =$$

نها ق(س) هنا تناقش النهاية من اليمين واليسار لأن ٤ نقطة تغيير بالتعريف
اي عند س = ٤ تنتقل من القاعدة الأولى إلى الثانية.

نها ق(س) = نها (س - ٤) = ٤ - ٤ = صفر من اليمين

نها ق(س) = نها (س + ٣) = ٤ + ٣ = ٧ من اليسار

وبما أن نها ق(س) \neq نها ق(س)

فإن نها ق(س) غير موجودة

بينما ق(٤) = ٤ - ٤ = صفر القيمة تأخذ القاعدة التي تحتوي المساواة أي أن

ق(س) معرف على ح عند س = ٤ ولكن نهايته غير موجودة.

مثال: إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ٣ \text{ س} , \text{ س} \neq ٣ \\ \text{س} , \text{ س} = ٣ \end{array} \right\}$

أوجد نها ق(س) ، نها ق(س) ، ق(س)

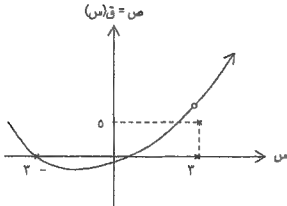
$$\text{س} \leftarrow ٣ \quad \text{س} \leftarrow ٥$$

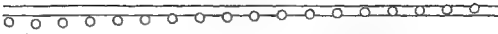
نستعين بالرسم للتوضيح

ملحوظة:

نأخذ القاعدة التي

تحتوي المساواة لإيجاد القيمة





والقاعدة التي لا تحوي المساواة لإيجاد النهاية وكأنها من اليسار واليمين معاً.

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س}^2 + \text{س)} = ٥ = ٣ + ٢ = ٥ = ١٥ + ٢٥ = ٤٠$$

س ← ٥ س ← ٥

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س}^2 + \text{س)} = ٣ = ٣ + ٢ = ٩ = ١٨$$

س ← ٣ س ← ٣

والتفسير يوضح بإعادة تعريف الاقتران ق(س) هكذا:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + \text{س} > ٣ \\ \text{س}^2 + \text{س} = ٣ \\ \text{س}^2 + \text{س} < ٣ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

وهند النهاية س ← ٣ معناه س ≠ ٣ أي أن س < ٣ أو س > ٣

$$\text{لذلك نها ق(س)} = \text{نها (س}^2 + \text{س)} = ٣ = ٣ + ٢ = ١٨$$

س ← ٣

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س}^2 + \text{س)} = ٣ = ٣ + ٢ = ١٨$$

س ← ٣

$$\therefore \text{نها ق(س)} = \text{نها (س}^2 + \text{س)} = ٣ = ٣ + ٢ = ١٨$$

س ← ٣ س ← ٣

بينما ق(٣) = ٥ مباشرة

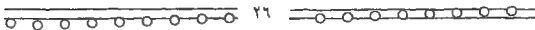
لهذا السبب نكتفي بإيجاد النهاية باستخدام ق(س) = س² + س، س ≠ ٣

فقط وعند إيجاد القيمة بالقاعدة ق(س) = ٥ ، س = ٣ فقط.

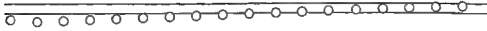
(٣) نهاية اقتران القيمة المطلقة

نبدأ بالمثال إذا كان ق(س) = |س - ٢| حيث داخل خطي القيمة المطلقة

اقتران خطي أوجد:



النهايات والاتصال



نها ق (س) ، نها ق (س) ، نها ق (س)

$$س - ٢$$

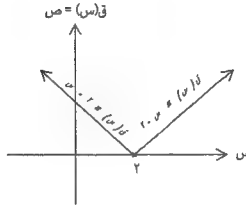
$$س + ٢$$

$$س - ١$$

نعيد تعريفه ونرسم منحناه تسهيلاً للحل هكذا:

س - ٢ = صفر ← س = ٢ صفر الاقتران، وهي نقطة تقاطع منحناه مع

محور السينات وتمثله بيانياً بالشكل



$$\left. \begin{array}{l} \text{أي أن ق(س)} = \begin{cases} - (س - ٢) ، س > ٢ & \text{لأنه سالب} \\ س - ٢ ، س \geq ٢ & \text{لأنه موجب} \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{أي أن ق(س)} = \begin{cases} - ٢ ، س > ٢ \\ س - ٢ ، س \geq ٢ \end{cases} \end{array} \right\}$$

وكان الاقتران أصبح اقتراناً متشعباً

نها ق (س) = نها (س - ٢) كون $٢ > ١$

$$س - ١$$

$$س - ١$$

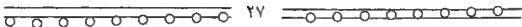
$$١ = ١ - ٢ =$$

نها ق (س) = نها (س - ٢) كون $٢ > ٣$

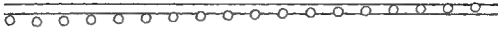
$$س - ١$$

$$س + ٣$$

$$١ = ٢ - ٣ =$$



النهايات والاتصال



نها ق(س)، كون ٢ نقطة تغيير بالتعريف لذا نجد النهاية من اليسار واليمين
 $2 \leftarrow s$

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س - ٢)} = 2 - 2 = \text{صفر من اليسار} \\ 2 \leftarrow s \quad 2 \leftarrow s$$

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س - ٢)} = 2 - 2 = \text{صفر من اليمين} \\ 2 \leftarrow s \quad 2 \leftarrow s$$

$$\therefore \text{نها ق(س)} = \text{صفر كون النهاية من اليسار} = \text{النهاية من اليمين} \\ 2 \leftarrow s$$

بينما ق(٢) نعوض في القاعدة التي تحتوي المساواة

$$\text{أي أن ق(س)} = 2 - 2 = \text{صفر}$$

$$\text{وكان القيمة} = \text{النهاية عند س} = 2$$

ملحوظة هامة :

يمكن إيجاد نهاية اقتران القيمة المطلقة مباشرة وبالتعويض دون إعادة تعريفه إلا إذا كانت النقطة المراد إيجاد النهاية عندها هي صفر الاقتران فنجد النهاية من اليسار واليمين كما مر سابقاً.

$$\text{أي أن نها ق(س)} = |2 - 1| = |1 - 1| = 1 \\ 1 \leftarrow s$$

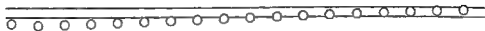
$$\text{أي أن نها ق(س)} = |2 - 3| = |1 - 1| = 1 \\ 3 \leftarrow s$$

إلا أن نها ق(س) يجب إعادة تعريفه وإيجادها من اليسار واليمين.
 $2 \leftarrow s$

مثال: إذا كان ق(س) = $|س + ٢ + ٥ س + ٦|$ ما بداخل خطي القيمة المطلقة اقتران تربيعي أوجد:



النهايات والاتصال



نها ق(س) ، نها ق(س) ، نها ق(س)

س ← ٢

س ← ٢

س ← ١

نجد النهاية بالتعويض المباشر دون إعادة التعريف إلا عند صفريه فالتعويض

المباشر والنهاية من اليمين واليسار كلاهما صواب - كما يلي:

إيجاد النهاية بالتعويض المباشر:

$$\text{نها ق(س)} = \lim_{s \rightarrow 1} (6 + (1)s + (1)s^2) = 12$$

س ← ١

$$\text{نها ق(س)} = \lim_{s \rightarrow 2} (6 + (2)s + (2)s^2) = 26$$

س ← ٢

$$\text{نها ق(س)} = \lim_{s \rightarrow 3} (6 + (3)s + (3)s^2) = 54$$

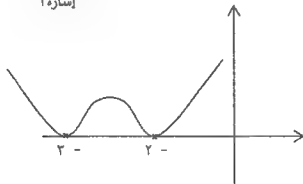
س ← ٣

وأما بعد إعادة التعريف واستخدام اليسار واليمين هكذا

$$س^2 + 5س + 6 = \text{صفر} \leftarrow (س + 3)(س + 2) = \text{صفر}$$

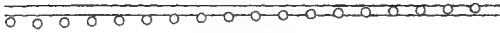
س = -٣ ، -٢ صفرا الاقتران

والرسم يوضح الحل: نفس إشارة! ، نفس إشارة! ، عكس إشارة! ، نفس إشارة!



$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > -2 \text{ ، } \text{س}^2 + 5\text{س} + 6 > 0 \\ \text{س} < -3 \text{ ، } \text{س}^2 + 5\text{س} + 6 > 0 \\ -3 < \text{س} < -2 \text{ ، } \text{س}^2 + 5\text{س} + 6 < 0 \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$





$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س}^2 + 5\text{س} + 6\text{)} \quad \text{كون } 1 < 2$$

$1 + s \quad 1 + s$

$$= (1 + 5 + 6) = 12 \text{ كما مر سابقاً}$$

$$\text{نها ق(س): من اليمين هكذا نها ق(س)}$$

$2 + s \quad 2 + s$

$$\text{نها (س}^2 + 5\text{س} + 6\text{)} = (2 + 5 + 6) = 13 \text{ صفر من اليمين}$$

$2 + s$

$$\text{نها } - \{ (س^2 + 5\text{س} + 6) \} - = \{ (2 + 5 + 6) \} - = 13 \text{ صفر}$$

$2 + s$

$$= \text{صفر من اليسار}$$

وينفس الأسلوب:

$$\text{نها ق(س) من اليمين واليسار = صفر بالتعويض المباشر}$$

$2 + s$

لذا:

«يتم إيجاد نهاية اقتران القيمة المطلقة بالتعويض المباشر»

(٤) نهاية اقتران أكبر عدد صحيح [س] أو الاقتران السلمي أو الدرجي.

$$\text{بعد إعادة تعريفه بشكل عام هكذا: [س]} = \text{س} \geq 0 \quad \text{س} > 0$$

$$\text{لأن } 2 = [2, 1] \leftarrow 2 > 2, 1 \geq 2 = [2, 1]$$

$$\text{وكذلك } 3 = [3, 1] \leftarrow 3 > 3, 1 \geq 3 = [3, 1]$$

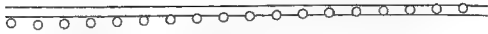
ليكن ق(س) = [أس + ب] ما بداخل القوسين اقتران خطي، يفضل مبدئياً

إعادة تعريفه أولاً في فترة تحتوي العدد الذي سوف تؤول إليه س مع الاستعانة بالرسم

البياني هكذا:



النهايات والاتصال



لإيجاد نها ق(س)، نُعيد تعريفه في الفترة [ج، د] حيث ك ∈ (ج، د)
 $s \leftarrow 1$

ثم نجد طول الدرجة $\frac{1}{|معامل س|}$ ونجد صفر الاقتران على خط الأعداد ثم نضيف أن نطرح طول الدرجة حتى نصل إلى الفترة المطلوبة.

مثال: إذا كان ق(س) = |س| أوجد نها ق(س)، نها ق(س)
 $s \leftarrow 1,5$ $s \leftarrow 2$

لإعادة تعريف الاقتران على الفترة التي تحتوي العددين 1,5، 2 وكيف نبدأ:

$$طول\ الدرجة = \frac{1}{|1|} = 1$$

نصف الاقتران: س = صفر

ثم نضيف طول الدرجة لنحصل على الفترة المناسبة وهي [1، 2] والتي تحتوي العددين 1,5، 2 كما في الشكل



نُعيد التعويض:

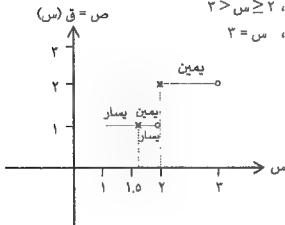
$$1 < s \leq 2,$$

$$2 < s \leq 3,$$

$$s = 3,$$

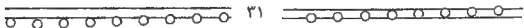
$$\left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = ق(س)$$

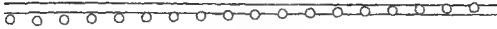
كما في الشكل



$$نها ق(س) = نها 1 = نها 1$$

$$s \leftarrow 1,5 \quad s \leftarrow 1,5 \quad s \leftarrow 1,5$$





بالحالتين لأن ١,٥ ليست طرفاً أما نقطة إعادة تعريف الاقتران

نها ق (س): من اليمين واليسار: لأن ٢ نقطة تغيير بالتعريف
 $\leftarrow ٢$

$$\begin{aligned} \text{نها ق (س)} &= \text{نها } ٢ \\ \leftarrow ٢ & \quad \leftarrow ٢ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نها ق (س)} &= \text{نها } ١ \\ \leftarrow ٢ & \quad \leftarrow ٢ \end{aligned}$$

∴ نها ق (س) غير موجودة
 $\leftarrow ٢$

وبشكل عام واختصاراً للوقت والجهد نضع القاعدة التالية:

لإيجاد نهاية اقتران أكبر عدد صحيح نعوض العدد المراد إيجاد النهاية عنده في الاقتران كما هو فإذا أنتج ما بداخل القوسين عدد صحيح فالنهاية غير موجودة وإذا أنتج عدد غير صحيح فالنهاية نفس القيمة هكذا:

$$\begin{aligned} \text{نها ق (س)} &= [١,٥] \text{ وهذا عدد غير صحيح فالنهاية نفسه} \\ \leftarrow ١,٥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{∴ نها ق (س)} &= [١,٥] \\ \leftarrow ١,٥ \end{aligned}$$

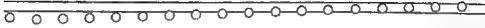
$$\begin{aligned} \text{وكذلك نها [س + ١]} &= [١,٧] \text{ وهذا عدد غير صحيح فالنهاية نفسه} \\ \leftarrow ٠,٧ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{∴ نها ق [س + ١]} &= [١,٧] \\ \leftarrow ٠,٧ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وكذلك نها } \left[\frac{١}{٢} \right] &= \left[١ - \frac{١}{٢} \right] = \left[٠,٥ \right] \\ \leftarrow ٠,٥ \end{aligned}$$

وهذا عدد صحيح فالنهاية غير موجودة

$$\begin{aligned} \text{∴ نها ق } \left[\frac{١}{٢} - \text{س} \right] & \text{ غير موجودة} \\ \leftarrow ٠,٥ \end{aligned}$$



(هـ) نهاية الاقتران النسبي أو نهاية خارج قسمة اقترانين

$$\text{الاقتران النسبي ل (س) = } \frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} , \text{ هـ (س) = صفر}$$

لتكن نها ق (س) = ل ، نها ق (س) = ك ، شرط هـ (س) ، ك لا تساويان صفر

أي أن المقام ونهاية كلاهما لا يساويان الصفر في كل الأحوال

فإن نها ق (س) = $\frac{\text{ل}}{\text{ك}}$ إذا كان الناتج عدداً حقيقياً ، وباستخدام طريقة التعويض المباشر.

$$\text{مثال: أوجد نها } \frac{\text{س}}{\text{س} + 2} = \frac{(2) 5}{2 + 2} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\text{ثم أوجد ق (2) = } \frac{(2) 5}{2 + 2} = \frac{10}{4} = 2.5$$

أما إذا كان التعويض المباشر ينتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فالنهاية غير موجودة

$$\text{مثال: أوجد نها } \frac{\text{س}}{\text{س} + 2} = \frac{(2 -) 5}{2 + 2 -} = \frac{10 -}{4 -} = \frac{10 -}{4 -} = 2.5$$

$$\text{وكذلك ق (2 -) = } \frac{(2 -) 5}{2 + 2 -} = \frac{10 -}{4 -} = \frac{10 -}{4 -} = 2.5$$

وأما إذا كان الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (فالنهاية يمكن أن تكون موجودة أو غير

موجودة ولكن طريقة إيجادها ليس بالتعويض المباشر وإنما بطرق أخرى)

$$\text{مثال: أوجد نها } \frac{\text{س} - 1}{\text{س} - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

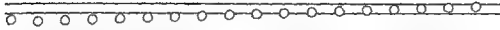
$$\text{التعويض المباشر = } \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

التعويض وإنما بطريقة أخرى.

$$\text{بينما ق (1) = } \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ وكون المقام = صفر فالاقتران غير}$$

معرف عندما س = 1

وأما النهاية يمكن إيجادها بإحدى الطرق التالية:



وكأننا نريد تبسيط الاقتران لإيجاد النهاية عندما يكون ناتج التعويض

المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ هكذا:

$$\text{مثال: أوجد نها } \frac{s^2 - 5s - 6}{s^2 - 1} = \text{ثم أوجد ق (-) (1)}$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{s^2 - 5s - 6}{s^2 - 1} = \frac{(-1)^2 - 5(-1) - 6}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

هنا نستخدم طريقة التحليل إلى العوامل ثم التعويض بعد ذلك:

$$\text{أي أن نها } \frac{s^2 - 5s - 6}{s^2 - 1} = \frac{(s+1)(s-6)}{(s+1)(s-1)} = \frac{s-6}{s-1} \text{ نها } \frac{s-6}{s-1} = \frac{1-6}{1-1} = \frac{-5}{0}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1-6}{1-1} = \frac{-5}{0}$$

ق (-) (1) وبالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والآن المقام = صفر فالاقتران غير

معرف عندما $s = 1$ دون تبسيط.

مثال: أوجد نها $\frac{s^2 - 1}{s^2 - 2s + 1}$ يمكن التحليل إلى العوامل حتى ولو

كانت النهاية بالتعويض المباشر موجودة.

$$\text{نها } \frac{(s^2 - 1)}{(s^2 - 2s + 1)} = \frac{(s+1)(s-1)}{(s-1)(s-1)} = \frac{s+1}{s-1} \text{ نها } \frac{s+1}{s-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}$$

$$16 = \frac{(1)(1)}{1} = \frac{(1+1)(1-1)}{1-1} = \frac{(2)(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

«الطريقة الأولى هي طريقة التحليل إلى العوامل»

$$\text{مثال: أوجد نها } \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4-s}{4s}}{\frac{2-s}{2s}} = \frac{4-s}{2(2-s)}$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{4-s}{2(2-s)} = \frac{4-2}{2(2-2)} = \frac{2}{0}$$

للتخلص من الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نوحّد المقامات في البسط أو المقام لجعله اقتراناً واحداً هكذا.

النهايات والاتصال

$$\frac{(1+s)^{-x}}{(1+s)^x} = \frac{1}{(1+s)^x} = \frac{1}{1+s} \times \frac{1}{(1+s)^{x-1}}$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{(1+5)\xi} = \frac{1}{(1+5)\xi_{\gamma=5}} = \frac{1}{1-5} \times \frac{-3}{(1+5)\xi} \quad \text{نها}$$

«أما الطريقة الثانية هي طريقة توحيد المقامات في البسط أو المقام أو كليهما معا»

مثال: أوجد نها $\frac{2 - 3 + \sqrt{x}}{1 - x}$ من 1^-

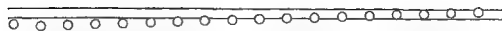
التعويض المباشر = $\frac{2 - 3 + 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

للتخلص من الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ تستخدم نطاق البسط أو المقام أو كليهما،
أيضاً الجذر موجود وذلك بضربه في مرافقه إذا كان تربيعياً وإلا فهناك طرق أخرى
تتناقشها في موضعها ومرافق أي مقدرًا جبري يحتوي جذراً (كحالة خاصة) هو نفسه
مع اختلاف الإشارة الفاصلة بين القسم المجذور وغير المجذور منه، إن وحداً.

مثال: أوجد نها

$$\frac{2 + \sqrt{2 + s}}{2 + \sqrt{2 + s}} \times \frac{2 - \sqrt{2 + s}}{1 - s}$$
$$\frac{1 - s}{(2 + \sqrt{2 + s})(1 - s)} = \frac{2 - \sqrt{2 + s}}{(2 + \sqrt{2 + s})(1 - s)}$$
$$\frac{1}{2 + \sqrt{2 + s}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2 + s}}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2 + 2}$$

النهايات والاتصال



مثال: أوجد نها $\frac{\sqrt{2 - 2 + s}}{2 - 2 + s}$ الانطلاق أصبح أثنان للبسط والمقام

وباختصار ودون إسهاب:

$$\frac{\sqrt{2 + 7 + s}}{2 + 7 + s} \times \frac{\sqrt{2 + 2 + s}}{2 + 2 + s} \times \frac{\sqrt{2 - 2 + s}}{2 - 2 + s}$$

$$\frac{\sqrt{2 + 7 + s}}{2 + 2 + s} \text{ نها} = \frac{(\sqrt{2 + 7 + s})(2 - 2 + s)}{(2 + 2 + s)(2 - 2 + s)}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{2 + 9}}{2 + 4}$$

لاحظ أن في جميع الأمثلة السابقة عندما يكون ناتج التعويض المباشر

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإن المقدار $s - 1$ يكون عاملاً من عوامل البسط والمقام معاً لذا تقسم عليه وتختصره هكذا:

$$\text{بشكل عام عندما نريد إيجاد نها ل (س) = نها } \frac{ق(س)}{س} \text{ فإن س - 1}$$

عاملاً من عوامل ق(س)، هـ (س) دائماً وبعد الانطلاق أو قبله يمكن

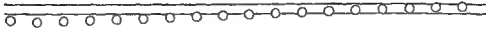
الاستفادة من هذه الميزة في إيجاد بعض النهايات مع استخدام طريقة القسمة المطولة كما يلي:

$$\frac{\sqrt{29 - 2 + s}}{27 - 2 + s} \text{ مثال: أوجد نها}$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{29 - (2) 2 + 2(2)}{27 - 2(2)} = \text{بالتعويض المباشر}$$

إذن $s - 2$ عامل مشترك في $s^2 + 4s - 29$ ، $s^2 - 27$ حتى وإن كان التحليل غير سهل ولكنه موجود لأن تحليل $s^2 + 4s - 29$ يعتمد على نظرية الباقي وفيه بعض الصعوبات (بالنسبة للطالب) والحل يطول لذا فالقسمة

النهايات والاتصال



الطويلة هي الأفضل وتقي بالمطلوب.

$$\begin{array}{r}
 \text{من } 2 + 3 + 12 \\
 \text{من } 2 - 3 \quad \begin{array}{r} 29 - 4 + 2 \\ 29 - 2 + 2 \end{array} \\
 \hline
 \text{من } 3 + 4 + 29 \\
 \text{من } 12 \pm 9 \\
 \hline
 \text{من } 13 - 29 \\
 \text{من } 12 \pm 29 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (3 - 29) \div (29 - 3) \\
 \\
 \text{من } 2 + 3 + 12 = \\
 \text{أي أن نها} \quad \frac{\text{من } 29 - 4 + 2}{\text{من } 29 - 2}
 \end{array}$$

$$\text{كفرق مكعبين} \quad \frac{(2 - 29)(29 - 3)}{(29 - 2)(2 + 3 + 12)} = \text{نها}$$

$$\frac{21}{27} = \frac{12 + (2)2 + 2^2}{9 + (2)3 + 2^2} = \frac{\text{من } 12 + 2 + 2}{\text{من } 9 + 3 + 2} = \text{نها}$$

فالطريقة الثالثة والرابعة هي الانطاق للبسط أو المقام أو الاثنين عندما يكون الدليل الجذر 2 والقسمة الطويلة وإلا فالطريقة التالية:

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{التمويض المباشر} \quad \frac{1 - 1}{1 - 1} = \text{أوجد نها}$$

للتخلص من الجذرين معاً تستخدم طريقة الفرض لأن الانطاق لغير الجذر التريبي صعب للغاية.

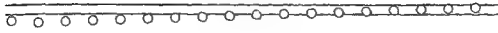
للأس (حاصل ضرب دليلي الجذرين)

$$\text{نفرض أن } 2 = \text{ص} \quad \text{ص} = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{أي أن } 2 = \text{ص}$$

وعندما $2 = 1$ فإن $2 = 1$ أيضاً





$$\text{لأن } 1 = 1^2 = 1^2$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}(1^2)}{1 - \frac{1}{2}(1^2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}(1^2)}{1 - \frac{1}{2}(1^2)} \quad \text{نها} = \frac{1 - \frac{1}{2}(1^2)}{1 - \frac{1}{2}(1^2)} \quad \text{نها} \therefore$$

$$\frac{(1 + 1^2)(1 - 1^2)}{(1 + 1^2)(1 - 1^2)} = \frac{1 - 1^2}{1 - 1^2} \quad \text{نها} = \frac{1 - 1^2}{1 - 1^2} \quad \text{نها}$$

$$\frac{(1 + 1^2)(1 + 1)}{(1 + 1^2)(1 + 1)} = \frac{(1 + 1^2)(1 + 1)}{(1 + 1^2)(1 + 1)} \quad \text{نها} = \frac{(1 + 1^2)(1 + 1)}{(1 + 1^2)(1 + 1)} \quad \text{نها}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{(2)(2)}{3} =$$

فالطريقة الخامسة هي الفرض عندما تكون أدلة الجذور أكبر من 2 أو عددها أكثر من جذر واحد ومختلفة الدليل كوجود الجذر التربيعي في البسط والتكعبي في المقام أو العكس.

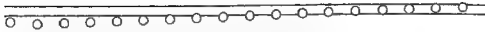
ملحوظة:

وبإيجاز شديد للتذكير نقول:

للتخلص من الصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ الناتجة من التعميوض المباشر عند إيجاد نهاية الاقتران النسبي نستخدم طرقاً هي:

- التحليل إلى العوامل
- توحيد المقامات
- انطاق البسط أو المقام أو لكليهما
- القسمة الطويلة أو التركيبية

النهايات والاتصال



○ تبديل س بمتغير آخر مثل ص مرفوعاً لأس يساوي حاصل ضرب دليلي الجذرين عندما تكون الأدلة أصغر من ٢.

(نظرية ٩): نهاية الاقترانات الدائرية (المثلثية)

تسمى كل من اقترانات الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام والقاطع وقاطع التمام بالاقترانات الدائرية لأنها تعرف من استخدام دائرة الوحدة. هذا معروف سابقاً.

$$\text{لكل } x \text{ حيث } 0 \leq x \leq \pi$$

ويمكن إيجاد نهاية كل من الاقترانات الدائرية بواسطة التعويض المباشر

هكذا: لكل x فإن:

$$\text{نها جاس} = \text{جا } x \quad \text{ومثاله نها جاس} = \text{جا } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

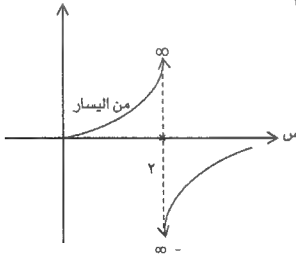
$$\text{نها جتا س} = \text{جتا } x \quad \text{ومثاله نها جتا س} = \text{جتا } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نها ظل س} = \text{ظا } x \quad \text{حيث } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) : \text{نها ظل س} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{ص} = \text{ق}(\text{ص}) = \text{ظا ص}$$

$$\text{ومثاله نها ظا س} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومن الشكل المجاور

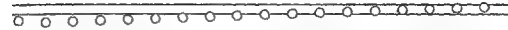


$$\text{نها ظا س} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{نها ظا س} = -\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{نها ظا س غير موجودة}$$

$$\text{أي أن نها ظا س غير موجودة}$$



وسنبين في هذا البند النظرية الآتية لإيجاد نهاية بعض الاقترانات الدائرية

لتكن θ زاوية مقاسها بالراديان Radian

$$\text{فإن نها } \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \text{ مهما كان قياس الزاوية}$$

$$\text{أي أن بشكل عام: نها } \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\text{ومثاله نها } \frac{\sin 5}{5} = 1$$

وبما أن استخدام هذه النظرية أكثر أهمية من طريقة إثباتها كونها

تستخدم في إيجاد نهاية الاقترانات الدائرية الأخرى والتي يجب أن نظهر فيها $\frac{\sin \theta}{\theta}$ كمايلي:

$$\text{كمثال: أوجد نها } \frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$

$$\text{دائماً نفرض الزاوية هـ} = 5\theta \text{ سـ} = \frac{\theta}{5}$$

وعندما $\theta \rightarrow 0$ فإن $5\theta \rightarrow 0$ أيضاً

$$\text{ومنها نها } \frac{\sin 5\theta}{5\theta} = \frac{\sin \text{نها}}{\frac{\theta}{5}}$$

$$= \frac{\sin \text{نها}}{\frac{1}{5}} = \frac{\sin \text{نها}}{1} \times \frac{1}{5}$$

$$= 1 \times 5 = 5 \text{ نها } \frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$

ويمكن إيجاد النهاية مباشرة بأنها معامل الزاوية س بالبسط على معامل

الزاوية س بالمقام.

النهايات والاتصال

$$\frac{2}{4} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \quad \text{مثال: أوجد نها} \quad \frac{2}{4} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \quad \text{مباشرة}$$

أو بفرض $\text{س} = \text{هـ}$ ونجد $\frac{2}{4} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$

$$\frac{2}{4} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} \quad \text{هكذا: نها} \quad \frac{2}{4} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} \quad \text{ويشكل عام:}$$

نها $\frac{1}{\text{ب}} = \frac{\text{جا س}}{\text{ب س}}$ وجميع الحالات تفترض الزاوية في البسط $= \text{هـ}$ وتكمل.

ومن النظرية نها $\frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$

نستطيع إيجاد نها $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ كما يلي

$$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

$$\frac{1}{\text{س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \quad \text{فإن نها} \quad \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

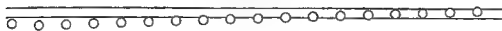
$$1 = \frac{1}{1} \times 1 = \frac{1}{\text{جتا صفر}} \times \frac{1}{\text{نها}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$$

أي أن:

$$\frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1 \quad \text{وكذلك نها} \quad \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = 1 \quad \text{أيضاً}$$

وللاستفادة من النظرية السابقة بشقيها يجب الإحاطة التالية بمعرفة

العلاقات بين الاقترانات الدائرية وتحويلها جميعاً إلى اقتراني «الجيب والظل» إذا أمكن لأنهما هما صلب النظريتين ثم استخدام المتطابقات المثلثية التالية:



$$\text{جاس} + \text{جتا}^2 = 1, \quad \text{جتا}^2 \text{س} = \text{جاس}^2 - \text{جاس}$$

$$2 = \text{جتا}^2 \text{س} - 1$$

$$1 = 2 \text{جاس}^2 - \text{جاس}$$

وغيرها من المتطابقات المثلثية الأخرى.

مثال: أوجد نها $\frac{\text{جاس} - \text{جا}}{1 - \text{س}}$ بعد تحويل الفرق إلى حاصل ضرب

هكذا:

$$\text{نها} = \frac{\text{جتا}^2 \frac{1 + \text{س}}{2} \text{جا} \frac{1 - \text{س}}{2}}{1 - \text{س}} \quad \text{وللعصول على} \quad \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} \quad \text{فإننا نفرض}$$

$$\frac{1 - \text{س}}{2} = \text{هـ} \quad \text{ومنها} \quad \text{س} = 1 - 2\text{هـ}$$

$$12 + 12 +$$

$$\text{أي أن} \quad \text{س} + 12 = 2 + 12$$

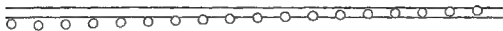
$$\text{ومن نها} \quad \frac{\text{جتا}^2 \frac{12 + 2}{2} \text{جا} \frac{2}{2}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جتا}^2 (1 + \text{هـ}) \text{جا هـ}}{\text{هـ}}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}} \times \text{نها جتا} (1 + \text{هـ}) = 1 \times \text{جتا} 1 = \text{جتا} 1$$

$$\text{مثال: أوجد نها} \quad \frac{1 - \text{جتا} \text{س}}{2 \text{س}}$$

$$\text{بأنطاق البسط نها} \quad \frac{1 - \text{جتا} \text{س}}{2 \text{س}} \times \frac{1 + \text{جتا} \text{س}}{1 + \text{جتا} \text{س}}$$

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{جتا} \text{س}}{2 \text{س}} \times \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2 (1 + \text{جتا} \text{س})}$$



فإذا كانت:

$$\text{نها لـك (س)} = \text{نها لـل (س)} = \text{م مثلاً (الأطراف)}$$

$\text{س} \leftarrow \text{أ} \quad \text{س} \leftarrow \text{أ}$

$$\text{فإن نها ق (س)} = \text{م نفسه (الوسط بينهما)}$$

$\text{س} \leftarrow \text{أ}$

$$\text{وإذا كانت نها لـك (س)} \neq \text{نها لـل (س)}$$

$\text{س} \leftarrow \text{أ} \quad \text{س} \leftarrow \text{أ}$

$$\text{فإن نها ق (س)} \text{ غير موجودة}$$

$\text{س} \leftarrow \text{أ}$

كما في الأمثلة التالية:

$$\text{مثال ١: إذا كان (س) } ١٢ + ٢ \text{ س} - ٩ \geq \text{ق (س)} \geq (٥ \text{ س})^2$$

$$\text{أوجد نها ق (س)}$$

$\text{س} \leftarrow \frac{2}{3}$

الحل: لا تستطيع التعويض لأن قاعدة ق (س) غير معلومة لذا

فإننا نجد:

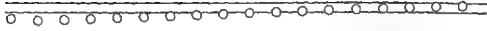
$$\text{نها (س)} ١٢ + ٢ \text{ س} - ٩ = (٥ \text{ س})^2 \left(\frac{2}{3} \right) = ٩ - \left(\frac{2}{3} \right) ١٢ + ٢ \left(\frac{2}{3} \right) \text{ س}$$

$$\frac{٤٥}{٤} = \frac{٣٦ + ٩}{٤} = \frac{٩}{١} + \frac{٩}{٤} = ٩ - ١٨ + \frac{٩}{٤} =$$

$$\frac{٤٥}{٤} = \left(\frac{٩}{٤} \right) ٥ = ٢ \left(\frac{2}{3} \right) ٥ = ٢ \text{ س} \leftarrow \frac{2}{3}$$

$$\text{وبما أن نها (س)} ١٢ + ٢ \text{ س} - ٩ = \text{نها ٥ س} \left(\frac{2}{3} \right) \text{ (الأطراف)}$$

$\text{س} \leftarrow \frac{2}{3} \quad \text{س} \leftarrow \frac{2}{3}$



فإن نهاية الاقتران الوسط بينهما :

$$\frac{45}{4} = \frac{3}{2} \text{ أي نها ق (س) } \frac{3}{2} \text{ س } \leftarrow$$

$$\frac{1}{\text{س}} \text{ س } \leftarrow \text{ أوجد نها س جا } \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{بما أن } 1 - \geq \frac{1}{\text{س}} \text{ جا } \frac{1}{\text{س}} \geq 1 \text{ } \{ \text{مدى اقتران الجيب } 1 - 1, 1 \}$$

وضرب الأطراف الثلاثة بقيمة المتغير س هكذا.

$$\text{س } \geq \text{س جا } \frac{1}{\text{س}} \geq \text{س}$$

$$\text{والآن نها } - \text{س} = \text{صفر}$$

$$\text{نها س} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{نها س جا } \frac{1}{\text{س}} = \text{صفر}$$

$$\frac{1}{\text{س}} \text{ س } \leftarrow \text{ أوجد نها س جتا } \frac{1}{\text{س}}$$

نستخدم نظرية الشطيرة هكذا :

$$\text{بما أن } 1 - \geq \text{جتا } \frac{1}{\text{س}} \geq 1 \text{ كون مدى اقتران جيب التمام } 1 - 1, 1$$

$$\text{وبما أن نها } - 1 = 1 \text{ كون نهاية الثابت = نفسه}$$

$$\text{وكذلك نها } 1 = 1 \text{ كون نهاية الثابت = نفسه}$$

$$\text{بما أن نها } - 1 \neq 1$$

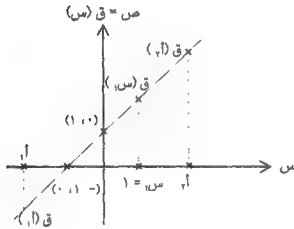
$$\text{فإن نها جتا } \frac{1}{\text{س}} \text{ غير موجودة}$$



Continuity (٢٠ - ٣)

مبدئياً وقبل الخوض بمناقشة مفهوم الاتصال رياضياً، يمكن أن يُقال أن الاقتران المتصل هو الذي يتكون منحناه من خط بياني واحد بلا انقطاع، وأما التفسير والتوضيح فإنه ينطلق من مفهوم الاتصال كما يلي:

وأما مفهوم الاتصال رياضياً فإنه يرتبط بالنهايات والقيمة ارتباطاً وثيقاً، ولتوضيح هذا المفهوم يجب مناقشة الاقترانات الثلاثة الآتية كما يلي:



الاقتران الأول: $ق(س) = س + ١$

الشكل المجاور يمثل منحناه

س	٠	١
ص	١	٠

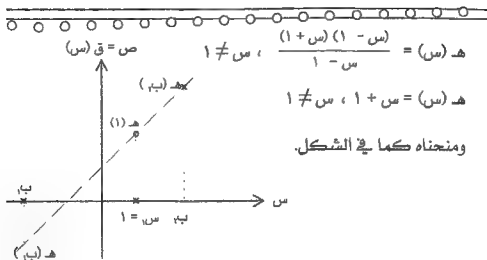
هناذا وضعت رأس القلم لترسم منحنى الاقتران - عند النقطة $ق(١)$ وسرت به للأعلى باتجاه $ق(١)$ مروراً ب $ق(س)$ دون أن ترفع رأس القلم عن الورقة لأي سبب من الأسباب.

عندها يسمى الاقتران $ق(س) = س + ١$ اقتراناً متصلاً عند $س_١$ حيث $س_١ = ١$ لأن منحنى الاقتران في هذه الفترة قطعة واحدة بلا انقطاع كما هو واضح بالشكل ولما كانت $س_١ = ١$ فإن $ق(س)$ متصل عند $س = ١$.

الاقتران الثاني: $ه(س) = \frac{س - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

وبعد تبسيطه بالتحليل يصبح كما يلي:

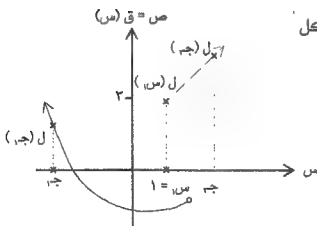
النهايات والاتصال



فإذا وضعت رأس القلم عند النقطة هـ (ب₁) - لرسم منحنى الاقتران - وسرت به للأعلى باتجاه هـ (ب₂) فإنك لن تصل هـ (ب₂) دون أن ترفع رأس القلم عند هـ (س₁) كونه هـ (س) غير معرف عند س = س₁ وليس للاقتران قيمة عند س₁.

ولما كانت س₁ = 1 فإن هـ (س) غير متصل عند س = 1 لأنه ليس قطعة واحدة كما هو واضح بل مقطوع عند هـ (1) لذا وضعت دائرة (غير مظلمة)

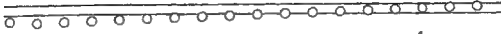
$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq س + 1 + س \\ 1 > س - 2 ، س \end{array} \right\} = \text{الاقتران الثالث: ل (س)}$$



ومنحناه كما في الشكل

فإذا وضعت رأس القلم عند النقطة ل (ج₁) - لرسم منحنى الاقتران - وسرت به للأسفل باتجاه ل (ج₂) فإنك لن تصل إلى ل (ج₂) دون أن ترفع رأس القلم

النهايات والاتصال



عند $ل (س_1)$ علماً بأن $ل (س_1) = 3$

لأنه من الواضح أن منحنى $ل (س)$ قطعتان

أي أن $ل (س)$ معرف عند $س_1 = 1$ ولكن نها $ل (س)$ غير موجودة.
 $س \rightarrow 1$

لأن نها $ل (س) = 1 + 2 = 3$ من اليمين
 $س \rightarrow 1^+$

وكذلك نها $ل (س) = (1)^- = 3 - 2 = 1$ من اليسار
 $س \rightarrow 1^-$

ولربط الاتصال بالقيمة والنهايات:

دونك الملاحظات التالية والتي يمكن تدوينها على منحنيات الاقتربات الثلاثة معاً.

(1) منحنى $ق (س) = س + 1$ خط بياني واحد.

$$ق(1) = 1 + 1 = 2$$

$$نهاق(س) = 1 + 1 = 2$$

$س \rightarrow 1$

أي أن النهاية = القيمة عند $س_1 = 1$

أي $ق (س_1) = نها ق (س) \xleftarrow{\text{أي } ق(س):} \text{متصل عند } (س_1 = 1)$
 $س \rightarrow س_1$

(2) منحنى $هـ (س) = \frac{1 - س^2}{1 - س}$ ، $س \neq 1$ ، ليس خطاً بياني واحد بل

اثنان (نتيجة لوجود نقطة عدم الاتصال)

$$هـ(1) = \frac{1 - 1^2}{1 - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{وكون المقام صفر فالاقتران غير معرف عند } س_1 = 1$$

فالقِيمة \neq النهاية كون القيمة غير موجودة لأن الاقتتران عند $s_1 = 1$ غير

ای ه (س) غیر متصل عند (س) = ۱

(نتيجة لوجود نقطة عدم اتصال)

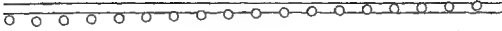
أى ل (س) غير متصل عند (س₁ = ١)

والآن نوجز النقاش السابق بتعريف الاتصال رياضياً على نقطة كما يلي:

ليكون ق(س) اقتران متصل عند $s = a$ يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة

الآتية معاً.

النهايات والاتصال



أولاً: ق(س) معرف عند س = أ أي أن ق(أ) عدد حقيقي.

ثانياً: نها ق(س) موجودة
س → أ

ثالثاً: نها ق(س) = ق(أ)
س → أ

وبإيجاز شديد ولكنه مفيد:

ق(س) متصل عند س = أ، عندما يكون للاقتران قيمة عند س = أ،
(مُعَرَّف) ونهايته موجودة ثم القيمة = النهاية عند س = أ.

وإذا لم يتحقق شرط من هذه الشروط الثلاثة فالاقتران ق(س)
غير متصل عند س = أ، عندها تسمى النقطة أ عدم اتصال أو نقطة
انفصال.

وإذا كان ق(س) متصل عند كل نقطة من نقط الفترة [أ، ب] فإننا نقول
أن ق(س) متصل على الفترة [أ، ب].

وإذا كان ق(س) متصل على الفترة $(-\infty, \infty)$ فإننا نقول أن ق(س)
متصل على ح أو ق(س) متصل.

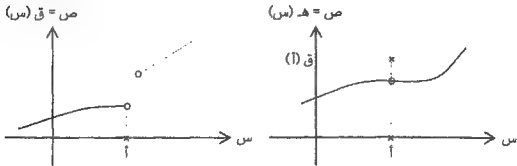
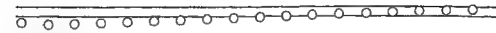
ولا تنس أن كثيرات الحدود جميعها متصلة على ح لأن ق(أ) = نها ق(س)
دائماً لكن أ ح لأن إيجادها (القيمة والنهاية) يتم بطريقة واحدة هي التعويض
المباشر فكيف بهما لا يتساويان؟ إلا إذا عرفت كثيرات الحدود بطريقة خاصة
ومغايرة للمألوف.

مثال: اعتماداً على أشكال منحنيات الاقتارات الثلاثة التالية ق(س)،

هـ(س)، ل(س)

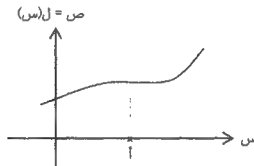


النهايات والاتصال



« ق (س) »

« هـ (س) »



« ل (س) »

بين لماذا ؟

(١) ق (س) غير متصل عند $s = \bar{s}$

الجواب: لأن ق (س) غير معرف عند $s = \bar{s}$

وكذلك نها ق (س) غير موجودة لاختلافها من اليمين واليسار (لم تحقق

شروط الثلاثة معا)

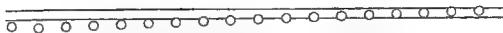
(٢) هـ (س) غير متصل عند $s = \bar{s}$

الجواب: لأن ق (س) معرف عند $s = \bar{s}$

ولأن نها ق (س) موجودة

من

النهايات والاتصال



لكن ق (١) \neq نها ق (س) (لم تتحقق الشروط الثلاثة معاً)
س ← ١

(٢) ل (س) متصل عند س = ١

الجواب: لأن ق (س) معرف عند س = ١

ولأن نها ق (س) موجودة
س ← ١

تم ق (١) = نها ق (س)
س ← ١

«كون الاتصال يتطلب الشروط الثلاثة معاً»

«وتحققت هذه في الاقتران ل (س)»

مثال: ابحث في اتصال ق (س) = س^٢ + ٥ س - ١ عند س = ٥

القيمة: ق (٥) = ٥^٢ + ٥(٥) - ١ = ٤٩

النهاية: نها (س) = س^٢ + ٥ س - ١ = ٥^٢ + ٥(٥) - ١ = ٤٩
س ← ٥

وبما أن ق (٥) = نها ق (س)
س ← ٥

فالاقتران متصل عند س = ٥

ليس هذا فحسب بل أنه متصل على ح كونه كثير حدود.

مثال: ابحث في اتصال ق (س) = $\left. \begin{array}{l} \text{القاعدة الأولى} \quad س + ٢, \quad س \leq ٢ \\ \text{القاعدة الثانية} \quad س - ٢, \quad س > ٢ \end{array} \right\}$ عند س = ٢

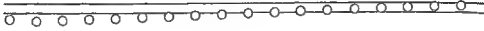
القيمة ق (٢) = ٢ + ٢ = ٤ كوننا عوضنا في القاعدة الأولى للتعريف أن

النهاية: من اليمين واليسار:

نها ق (س):
س ← ٢



النهايات والاتصال



$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س} + 2) = 2 + 2 = 4$$

س ← 2

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها (س} - 2) = 2 - 2 = 0$$

س ← 2

$$\text{وبما أن نها ق(س)} \neq \text{نها ق(س)}$$

س ← 2 س ← 2

فإن نها ق(س) غير موجودة

س ← 2

$$\therefore \text{ق(س) غير متصل عند س} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 4 \\ \text{س} = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\text{س} - 2 - 12}{\text{س} - 4} \\ 0 \end{array} = \text{مثال: ابحث في اتصال ق(س)}$$

عند س = 4

القيمة: ق(4) = 0

$$\text{النهاية: نها ق(س)} = \frac{(\text{س} - 4)(\text{س} + 3)}{\text{س} - 4} = 3 + 4 = 7$$

س ← 4 س ← 4 س ← 4

وبما أن القيمة \neq النهاية في الاقتران غير متصل عند س = 4

والجدير بالذكر أنه يمكن إعادة تعريف الاقتران الغير متصل بسبب أن

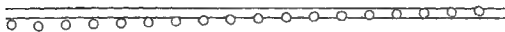
القيمة \neq النهاية لجعله متصلاً بأن نجعل القيمة = النهاية كونه معرف عند س = 4، ونهايته موجودة أيضاً.

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 4 \\ \text{س} = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\text{س} - 2 - 12}{\text{س} - 4} \\ 0 \end{array} = \text{فالاقتران ق(س)}$$

الغير متصل عند س = 4



النهايات والاتصال



يمكن إعادة تعريفه ليصبح متصلاً عند $s = 4$ هكذا

$$\left. \begin{array}{l} s \neq 4, \\ s = 4, \end{array} \right\} \frac{s^2 - 12s + 12}{s - 4} = q(s)$$

عندها يصبح الاقتران متصل كون القيمة $q(4) = 7 =$ النهاية نها $q(s)$ $s \rightarrow 4$

(من اليمين واليسار)

ونستمر بمناقشة الاتصال لنعرفه على فترة مثل $[a, b]$

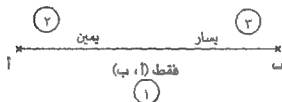
يكون $q(s)$ متصل على الفترة $[a, b]$ إذا كان متصلاً:

« 1 » عند كل نقطة من نقاط الفترة (a, b)

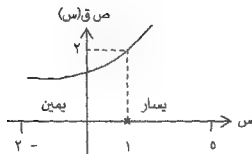
« 2 » وعلى يمين a أي أن نها $q(s) = q(a)$ $s \rightarrow a^+$

« 3 » وعلى يسار b أي أن نها $q(s) = q(b)$ $s \rightarrow b^-$

كما في الشكل:



$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 - 2s + 1 > 0, \\ s^2 - 2s + 1 \geq 0, \end{array} \right\} = \text{مثال: إذا كان } q(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s - 2}$$

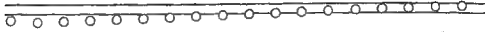


أبحث في اتصاله على $[-2, 0]$

منحناه كما في الشكل



النهايات والاتصال



أولاً: نبحث في اتصاله على الفترة $(-2, 0)$ المفتوحة.

متصل عندما $s > 1$ لأن $(s+1)$ كثير حدود تربيعي

ومتصل عندما $s < 1$ لأن $(2s)$ كثير حدود خطي

ثم متصل عند $s = 1$ لأن $q(1) = 1 + 1 = 2$

ولأن نها $q(s) =$ نها $q(1) = 2$ أي $2 = 2$

$s \rightarrow 1^-$ $s \rightarrow 1^+$

∴ $q(s)$ متصل على الفترة $(-2, 0)$ المفتوحة.

ثانياً: نبحث في اتصاله على يمين -2 هكذا

متصل على يمين -2 لأنه كثير حدود أو لأن نها $2s = q(-2) = -4$

$s \rightarrow -2^+$

$$\text{أي } 2(-2) = (-2) - 2 = -4$$

ثالثاً: وبأسلوب مماثل متصل على يسار 0 لأنه كثير حدود

$$\text{أو لأن نها } s \rightarrow 0^- \quad 1 + 5 = 6 = q(0)$$

$s \rightarrow 0^-$

$$\text{وكذلك } q(0) = 1 + 5 = 6$$

ولالاختصار نبحث في اتصاله عند نقطة التغير بالتعريف فقط.

واتماماً لفهم الاتصال هناك معلومات يجب التركيز عليها لأهميتها في

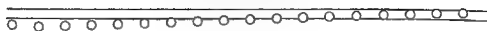
الاتصال ولتكرارها باستمرار وهي:

(١) كثيرات الحدود جميعها متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا

عرفت بطريقة مغايرة.



النهايات والاتصال



مجال ق(س) = $س^2 + 1 \leq$ صفر

وحتى نجد أصفاره: $س^2 + 1 =$ صفر

$س^2 - 1 =$ وهذا مستحيل في ح أي ليس له أصفار حقيقية

$$ق(س) = (س - 1) \sqrt{س^2 + 1} = 0$$

$$نها ق(س) = ق(س - 1) \sqrt{س^2 + 1} = 0 \quad \text{تعويضاً مباشراً}$$

س = 1

∴ ق(س) متصل عند س = 1

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \geq س \geq 0 \\ \frac{\pi}{6} \leq س < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{جئنا} \\ \text{ظا} \end{array} = 0$$

ابحث في اتصاله في الفترة $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

نبحث في اتصاله عند س = 0 لأنها داخل الفترة $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

$$ق(0) = 3 \quad \text{جئنا صفر} = 3 = (1) 3$$

نها ق(س) =

س = 0

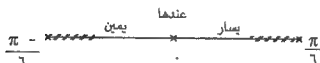
$$نها ق(س) = نها \frac{\text{ظا} س}{س} = 3 \quad \{ \text{تطبيقاً على النظرية نها} \frac{\text{ظا} س}{س} = 1 \}$$

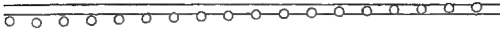
س = 0

$$نها ق(س) = نها 3 \text{ جئنا س} = 3 \quad \text{جئنا صفر} = 3 = (1) 3 \quad \text{تعويض مباشر}$$

س = 0

وبما أن القيمة = النهاية عند س = صفر





فهو متصل عند س = صفر

ونبحث في اتصاله على يمين $(-\frac{\pi}{4})$

هكذا:

ق $(-\frac{\pi}{4}) = 3$ جتا $(-\frac{\pi}{4}) = 3$ جتا $(\frac{\pi}{4})$ كون جتا $(-)$ س = جتا س

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = (\frac{\sqrt[3]{3}}{2}) = 3$$

والنهاية على يمين $(-\frac{\pi}{4})$ نجدها بالتعويض أيضاً وتعطي نفس القيمة $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

فهو متصل على يمين $(-\frac{\pi}{4})$

ونبحث في اتصاله على يسار $(\frac{\pi}{4})$

∴ ق (س) متصل في الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

وكون الاقتران مثلي يكفي أن نبحث في اتصاله عند س = صفر ليكون

متصلاً على الفترة $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ لأنه متصل مثل كثيرات الحدود.

ملحوظة:

اقترانات الجيب وجيب التمام الدائرية متصلة على ح مثل كثيرات الحدود تماماً.

كمثال: أوجد نقط عدم الاتصال (الانفصال) للاقتران

$$ق (س) = \frac{س}{س^2 - 3س + 2}$$

الحل: بما أن الاقتران النسبي غير متصل عند أصفار مقامه الحقيقية فإننا

نجد أصفار المقام هكذا:

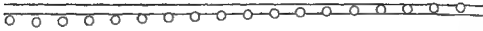
$$س^2 - 3س + 2 = صفر \quad (نصفر المقام)$$

$$(س - 2)(س - 1) = صفر \quad \text{ثم نحله}$$

$$س = 2, 1$$

∴ نقط عدم الاتصال هي عندما س = 1 ، س = 2

فيصبح ق (س) غير متصل عند س = 1 ، س = 2



(٢٠ - ٤) نظريات في الاتصال:

سنورد فيما يلي نظريات في الاتصال، والتي تتج بشكل مباشر عن نظريات النهايات والحقيقة إن شئت الصواب ما هذه النظريات إلا حالات خاصة من نظريات النهايات وكما يلي:

نبدأ بهذا السؤال: ليكن $Q(s)$ ، هـ (s) اقترانين متصلان عند $s = a$ ، فماذا بشأن اتصال كل من ؟

(١) $Q + H$ (س)، عند جمع اقترانين أو أكثر.

(٢) $Q - H$ (س)، عند طرح اقترانين أو أكثر.

(٣) $Q \cdot H$ (س)، عند ضرب اقترانين أو أكثر.

(٤) Q / H (س)، عند قسمة اقترانين أو أكثر.

(٥) $Q \circ H$ (س)، عند تركيب اقترانين أو أكثر شرط $H(a) \neq \text{صفر}$

(٦) $|Q(s)|, |H(s)|$ ؛ القيمة المطلقة للاقتران المتصل.

(٧) $\sqrt[n]{Q(s)}, \sqrt[n]{H(s)}$ ، جذر الاقتران المتصل لكن $n \leq 2$

وعدد طبيعي لأن دليل الجذر دائماً موجب.

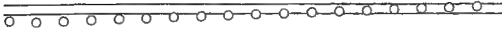
ثم نجيب عنه كما في المثال:

مثال: إذا كان $Q(s) = s$ متصل لأنه كثير حدود وعند $s = 1$ متصل

$$\text{أيضاً } H(s) = \frac{s^2}{s+1} = s - \frac{1}{s+1} \text{ متصل عند } s = 1$$

والأجوبة تكون:

النهايات والاتصال



$$(1) \quad (ق + هـ) (س) = \frac{س^2}{1 + س} + \frac{س}{1} = \frac{س^2 + س + س^2}{1 + س} = \frac{2س^2 + س}{1 + س} \neq 1 - س$$

فهو متصل عند س = 1

$$(2) \quad (ق - هـ) (س) = \frac{س^2}{1 + س} - \frac{س}{1} = \frac{س^2 - س - س^2}{1 + س} = \frac{-س}{1 + س} \neq 1 - س$$

1 - فهو متصل عند س = 1

$$(3) \quad (ق \cdot هـ) (س) = \left(\frac{س^2}{1 + س} \right) \left(\frac{س}{1} \right) = \frac{س^3}{1 + س} \neq 1 - س$$

متصل عند س = 1

$$(4) \quad (ق \div هـ) (س) = \frac{س^2}{1 + س} \times \frac{1 + س}{س} = \frac{س^2}{س} = س \neq 1 - س$$

{ 0 ، 1 } فهو متصل عند س = 1 شرط أن س ≠ صفر

$$(5) \quad (ق \div هـ) (س) = \left(\frac{س^2}{1 + س} \right) (س) = \frac{س^3}{1 + س} \neq 1 - س$$

1 فهو متصل عند س = 1

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} -س ، س > 0 \\ س ، س \leq 0 \end{array} \right\} = |ق(س)| = |س|$$

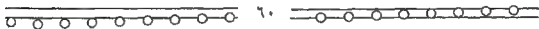
وعندما س = 1 فإن ق = 1

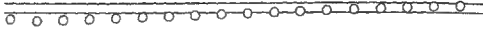
نها ق (س) = نها س = 1 فهو متصل

$$\text{وكذلك} \quad \left| \frac{س^2}{1 + س} \right| \text{ متصل عند س} = 1 \text{ لأن س} \neq 1$$

$$(7) \quad \sqrt[n]{ق(س)} = \sqrt[n]{س} \text{ متصل عند س} = 1 \text{ لأن 1 موجب والقيمة والنهاية}$$

نعوض العدد 1





$$\text{وكذلك } \sqrt[n]{\frac{s}{1+s}} = \sqrt[n]{\frac{s}{1+s}} \text{ متصل عند } s = 1$$

والآن ندون منطوق نظريات الاتصال بما يلي:

من النظريات السابقة مع شيء من التحفظ كما سيظهر في خلال السياق.

«لأي اقتترائين q (س)، h (س) المتصلين عند $s = 1$ »

فإن:

$$q \text{ (س) } + h \text{ (س) } = (q + h) \text{ (س) متصل عند } s = 1$$

$$\text{وأن: } q \text{ (س) } - h \text{ (س) } = (q - h) \text{ (س) متصل عند } s = 1$$

$$\text{وأن: } q \text{ (س)، } h \text{ (س) متصلان عند } s = 1 \text{ حيث } q \text{ عدد حقيقي}$$

$$\text{وأن: } q \text{ (س)، } h \text{ (س) } = (q \cdot h) \text{ (س) متصل عند } s = 1$$

$$\text{وأن: } \frac{q \text{ (س)}}{h \text{ (س)}} = \left(\frac{q}{h} \right) \text{ (س) متصل عند } s = 1 \text{ شرط أن } q \neq 0$$

وكذلك $h \neq 0$

$$\text{وأن: } q \text{ (س) } \circ h \text{ (س)، } (q \circ h) \text{ (س) متصلان عند } s = 1$$

$$\text{وأن: } |q \text{ (س)}| \text{، } |h \text{ (س)}| \text{ متصلان عند } s = 1$$

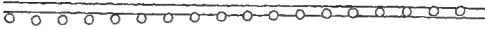
$$\text{وأخيراً } \sqrt[n]{q \text{ (س)}}, \sqrt[n]{h \text{ (س)}} \text{ متصلان عند } s = 1 \text{ حيث } n \text{ عدد}$$

طبيعي ≥ 2 و $q \text{ (س)، } h \text{ (س) موجبان عندما } q \text{ زوجية فقط.}$

ولكن التحفظ الذي نوهنا عنه يكمن في أن عكس النظريات السابقة

ليس دائماً صواب وإليك الأمثلة للتوضيح:

النهايات والاتصال



اتصال (ق. هـ) (س) عند $s = 2$

ق (س) متصل عند $s = 2$ كونه كثير حدود

هـ (س) متصل عند $s = 2$ كونه هـ (2) = صفر ، نها هـ (س) = $|2 - 2| = 0$ صفر
س = 2

$$\left\{ \begin{array}{l} s \leq 2, \quad s - 2 \\ s > 2, \quad s - 2 \end{array} \right\} \quad \text{والآن ق. هـ} = (2 + s)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \leq 2, \quad 2 - s \\ s > 2, \quad 2 + s \end{array} \right\} =$$

ق. هـ (2) = صفر بالتعويض المباشر

نها (ق. هـ) (س) = نها (ق. هـ) (2) = صفر بالتعويض المباشر.

$$s = 2 \quad s = 2$$

∴ (ق. هـ) (س) متصل.

$$\left\{ \begin{array}{l} s \leq 1, \quad 1 \\ s > 1, \quad 1 - s \end{array} \right\} = \text{مثال: إذا كان ق (س) =}$$

ابحث في اتصال [ق (س)] عند $s = 0$ صفر

لنبحث أولاً في اتصال ق (س) نفسه ، عند $s = 0$ صفر

ق (0) = 1 من القاعدة الأولى

نها ق (س) = 1 ، نها ق (س) = 1 -

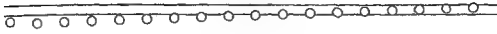
$$s = 0 \quad s = 0$$

∴ نها ق (س) غير موجودة

$$s = 0$$

أي أن ق (س) غير متصل عند $s = 0$ صفر





لنجد قاعدة (ق س) ^٢ هكذا :

$$(ق س) = \left. \begin{array}{l} \text{س} \leq 0 \\ \text{س} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س}^2(1) \\ \text{س}^2(-1) \end{array}$$

$$\text{أي أن } (ق س) = \left. \begin{array}{l} \text{س} \leq 0 \\ \text{س} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 1 + \text{صفر} \end{array}$$

وهو متصل على ح

∴ (ق س) متصل عند س = صفر

هذا المثال يُجسّد الحقيقة القائلة :

■ مربع الاقتران غير المتصل يمكن أن يكون متصلاً !!!

أمثلة محلولة على النهايات والاتصال

مثال ١: أوجد:

$$(1) \text{ نها } (س^4 + ٣س^٢ + س + ١) \text{ مع } س \rightarrow ٠$$

الحل: بالتعويض المباشر:

$$١ = ١ + (٠) + ٣(٠) + ٢(٠) + ١(٠) =$$

$$(2) \text{ نها } \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٥س + ٤} \text{ مع } س \rightarrow ٤$$

الحل: انطاق البسط:

$$\begin{aligned} \text{نها } \frac{س - ٤}{(س + ٢)(س - ٤)(١ - س)} &= \text{نها } \frac{(س - ٤)(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ٤)(١ - س)} \text{ مع } س \rightarrow ٤ \\ \frac{١}{١٢} &= \frac{١}{(٤)(٢)} = \frac{١}{(٢ + ٤)(١ - س)} = \frac{١}{(س + ٢)(١ - س)} \text{ مع } س \rightarrow ٤ \end{aligned}$$

$$(3) \text{ نها } \frac{س - ٧}{س^٢ - ٢س + ٣} \text{ مع } س \rightarrow ٧$$

الحل: انطاق المقام

$$\begin{aligned} \text{نها } \frac{(س - ٧)(س + ٢ + ٣)}{٩ - ٢س + س^٢} &= \text{نها } \frac{(س - ٧)(س + ٢ + ٣)}{(س^٢ - ٢س + ٣)(س - ٧)} \text{ مع } س \rightarrow ٧ \\ \text{نها } \frac{(س - ٧)(س + ٢ + ٣)}{(س - ٧)} &= \text{نها } (س + ٢ + ٣) \text{ مع } س \rightarrow ٧ \end{aligned}$$

$$٦ = ٣ + ٣ = ٣ + ٩ = ٣ + ٢ + ٧ =$$

مثال ٢: أوجد:

$$\frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{نها}} \quad \text{س.س.} \quad \frac{\text{ظا } 5\text{س}}{\text{نها}}$$

الحل: نقسم كلاً من البسط والمقام على س هكذا

$$\frac{\frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{س.س.}}}{\frac{\text{ظا } 5\text{س}}{\text{س.س.}}} = \frac{\frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{س.س.}}}{\frac{\text{ظا } 5\text{س}}{\text{س.س.}}} = \frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{س.س.}} \cdot \frac{\text{س.س.}}{\text{ظا } 5\text{س}} = \frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{ظا } 5\text{س}}$$

$$\frac{\text{جتا } 3\text{س} - 1}{\text{س.س.} (\text{جتا } 3\text{س} + 1)}$$

الحل: نحول البسط إلى الجيب هكذا

$$\text{جا } 3\text{س} + \text{جتا } 3\text{س} = 1 \quad \text{متطابقة مشهورة}$$

$$\text{ومنها جتا } 3\text{س} = 1 - \text{جا } 3\text{س}$$

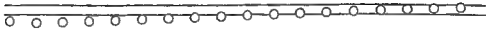
$$\therefore \text{جتا } 3\text{س} - 1 = -\text{جا } 3\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{جتا } 3\text{س} - 1}{\text{س.س.} (\text{جتا } 3\text{س} + 1)} = \frac{-\text{جا } 3\text{س}}{\text{س.س.} (\text{جتا } 3\text{س} + 1)}$$

$$\frac{\text{جتا } 3\text{س}}{\text{س.س.}} \times \frac{-\text{جا } 3\text{س}}{\text{س.س.} (\text{جتا } 3\text{س} + 1)} = \frac{-\text{جا } 3\text{س}}{\text{س.س.} (\text{جتا } 3\text{س} + 1)}$$

$$(1) = \frac{-\text{جا } 3\text{س}}{\text{جتا } 3\text{س} + 1} = (1) = \left(\frac{\text{صفر}}{1+1} \right) = (1) = \text{صفر} = \text{صفر}$$

$$\frac{\text{نها}}{\frac{\pi}{6} - \text{س}} = \frac{\text{جا } (\text{س} + \frac{\pi}{6}) - 1}{\frac{\pi}{6} - \text{س}}$$



$$\frac{\pi}{\varepsilon} - \text{ص} = \text{س} \text{ نفرض أن}$$

$$\frac{\pi}{\varepsilon} + \text{ص} = \text{س} \therefore$$

$$\text{نها} = \frac{\text{جا} (\text{س} + \frac{\pi}{\varepsilon}) - (\frac{\pi}{\varepsilon} + \text{ص})}{\frac{\pi}{\varepsilon} - \text{ص}} = \frac{\text{جا} (\text{ص} + \frac{\pi}{\varepsilon}) - (\frac{\pi}{\varepsilon} + \text{ص})}{\text{ص}}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{جا} (\text{ص} + \frac{\pi}{\gamma}) - (\frac{\pi}{\gamma} + \text{ص})}{\text{ص}}$$

$$\text{وبما أن جا} \frac{\pi}{\gamma} = 1$$

$$\therefore \text{نها} = \frac{\text{جا} (\text{ص} + \frac{\pi}{\gamma}) - (\frac{\pi}{\gamma} + \text{ص})}{\text{ص}}$$

وبعد تحويل البسط إلى حاصل ضرب اقترانين

$$\text{نها} = \frac{\text{جا} \frac{\text{ص}}{\gamma} \text{جتا} (\frac{\pi + \text{ص}}{\gamma})}{\text{ص}}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{جا} \frac{\text{ص}}{\gamma} \text{جتا} (\frac{\pi}{\gamma} + \frac{\text{ص}}{\gamma})}{\frac{\text{ص}^2}{\gamma}}$$

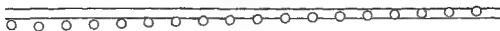
$$\text{نها} = \frac{\text{جا} \frac{\text{ص}}{\gamma}}{\frac{\text{ص}}{\gamma}} \times \text{نها} (\frac{\pi}{\gamma} + \frac{\text{ص}}{\gamma})$$

$$= (1) \text{جتا} \frac{\pi}{\gamma} = (1) (\text{صفر}) = \text{صفر}$$

مثال ٣: أوجد:

$$(1) \text{نها} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\text{س}} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\text{ص}} \right)$$

النهايات والاتصال



الحل: توحيد المقامات

$$\left(\frac{1}{s-4} \right) \left(\frac{s-4}{s} \right) = \left(\frac{1}{s-4} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{(4)s} = \frac{1}{s} \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

$$\frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} - 1} \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

الحل: بالتعويض المباشر

$$\frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} - 1} = \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1 + \text{صفر}}{1 - \text{صفر}} = \frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} - 1} =$$

$$\frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} - 1} \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

الحل: انطاق المقام:

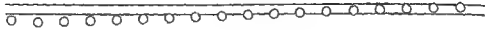
$$\frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} + 1} \times \frac{\sqrt{s} + 1}{\sqrt{s} - 1} \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

$$\frac{4}{\text{صفر}} = \frac{(\sqrt{s} + 1)^2}{1 - 1} = \frac{(\sqrt{s} + 1)^2}{0} \quad \text{نها } s \rightarrow 4$$

$$\left. \begin{array}{l} s > 1 \\ s \leq 1 \end{array} \right\} \quad \text{مثال 4: إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} s^2 \\ s - 3 \end{array} \right\}$$

ما قيمة أ ليصبح ق(س) متصلًا عند س = 1





الحل: ليكون ق(س) متصلاً يجب أن يكون

$$ق(1) = نها ق(س)$$

س ← 1

$$ق(1) = (1) \uparrow = 3 - 1 = 2$$

نها ق(س)

س ← 1

$$من اليمين (1) = 1$$

$$من اليسار (1) = 2$$

$$\therefore 1 = 3 - 1 \quad 1 = 2$$

$$\text{مثال 5: ابحث في اتصال ق(س) = } \frac{س - 1}{|س - 1|} \text{ عند س = 1}$$

الحل: نعيد التعويض هكذا:

$$\left. \begin{array}{l} 1 < س , \quad 1 - س \\ 1 \leq س , \quad 1 - س \end{array} \right\} = |1 - س|$$

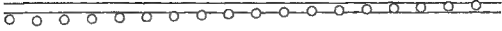
$$\left. \begin{array}{l} 1 < س , \quad \frac{س - 1}{س - 1} \\ 1 \leq س , \quad \frac{س - 1}{س - 1} \end{array} \right\} = ق(س)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 < س , \quad 1 - س \\ 1 \leq س , \quad 1 \end{array} \right\} = ق(س)$$

$$ق(1) = \text{بالتعويض المباشر قبل إعادة التعويض} = \frac{1 - 1}{|1 - 1|} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

\therefore ق(س) غير معرف عند س = 1

النهايات والاتصال



$$\left. \begin{array}{l} \text{نها ق (س)} = 1 \\ \text{من اليمين} \\ \text{من اليسار} \end{array} \right\} \text{س} \leftarrow 1$$

∴ نها ق (س) غير موجودة
س ← 1

∴ ق (س) غير متصل

ولا يمكن إعادة تعريفه ليصبح متصلاً كونه غير معرف عند س = 1

مثال ٦: ابحث في اتصال

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 4 \text{ ، س} > ٥ \text{ القاعدة الأولى} \\ \text{س} = ٥ \text{ ، القاعدة الثانية} \\ \text{س}^2 \text{ ، س} < ٥ \text{ القاعدة الثالثة عند س} = ٥ \end{array} \right\} \text{ق (س)} =$$

الحل: ق (٥) = ٥ القاعدة الثانية لتعريف الاقتران

نها ق (س) من اليمين واليسار
س ← ٥

$$\text{نها ق (س)} = \text{نها س}^2 = ٨ = \text{ق (٥)} \quad \text{س} \leftarrow ٥ \quad \text{س}^2 \leftarrow ٥$$

$$\text{نها ق (س)} = \text{نها (س}^2 + 4) = ٨ = \text{س}^2 + 4 \quad \text{س} \leftarrow ٥ \quad \text{س}^2 \leftarrow ٥$$

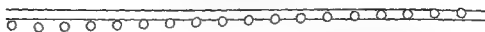
$$\text{∴ نها ق (س)} = ٨ \quad \text{س} \leftarrow ٥$$

وبما أن ق (٥) ≠ نها ق (س)
س ← ٥

∴ ق (س) غير متصل عندما س = ٥



النهايات والاتصال



ولكن يمكن إعادة تعريفه ليصبح متصلاً عند $s = 2$ عندما نجعل القيمة

$$= \text{النهاية عند } s = 2$$

هكذا:

$$\left. \begin{array}{l} s < 2, \quad s \\ s = 2, \quad 1 \\ s > 2, \quad s \end{array} \right\} = (s)$$

الآن أصبح $q(s)$ متصلاً عند $s = 2$ كون القيمة = النهاية = 1

$$q(s) \geq 1 \quad \text{مثال ٧: إذا كان} \quad 1 + (s-2)^2 \geq 1$$

$$s \neq 2, \quad s \neq 2$$

الحل باستخدام نظرية الشطيرة

$$1 = 1 \quad \text{بما أن نها } 1 = 1 \quad \text{كون نهاية الثابت} = \text{نفسه}$$

$$1 = 1 + (s-2)^2 = 1 + (s-2)^2 \quad \text{وأن نها } 1 = 1 + (s-2)^2 \quad \text{بالتعويض المباشر}$$

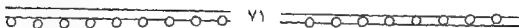
$$1 = 1 + (s-2)^2 = 1 + (s-2)^2 \quad \text{وأن نها } 1 = 1 + (s-2)^2 \quad \text{(الطرفان متساويان بالنهاية)}$$

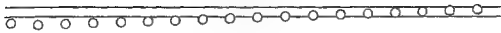
∴ وحسب نظرية الشطيرة فإن

$$1 = (s) \quad s \neq 2$$

$$\text{مثال ٨: أوجد نها } \frac{1}{s} - 1 \quad s \neq 0, \quad s \neq 0$$

الحل: بالتحليل إلى العوامل:





كفرق بين مربعين

$$\frac{\left(\frac{1}{s} + 1\right) \left(\frac{1}{s} - 1\right)}{\left(\frac{1}{s} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{s} - 1}{\frac{1}{s} - 1} = 1$$

غير موجودة.

$$1 = \frac{1}{\text{صفر}}$$

مثال ٩: أوجد نها

$$\frac{1 - s^0}{1 - s^1}$$

بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} \text{س} \\ 1 - s^1 \overline{) 1 - s^0} \\ \underline{1 - s^1} \\ 0 \end{array}$$

ينتج أن:

نها

$$\frac{1 - s^0}{1 - s^1} = \frac{1 - s^0}{1 - s^1} = 1$$

نها س + نها

$$\frac{1 - s^0}{1 - s^1} + \frac{1 - s^1}{1 - s^1} = \frac{1 - s^0 + 1 - s^1}{1 - s^1} = \frac{2 - s^0 - s^1}{1 - s^1}$$

نها

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} = \frac{1}{1} + 1 = \frac{1}{(1+1)(1+1)} + 1 = 1$$

مثال ١٠: أبحث في اتصال ق (س) = $\sqrt{1 - s}$ عند س = ٢

الحل:

القيمة ق (٢) = $\sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1} = 1$

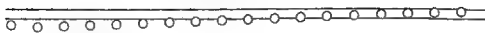
نها ق (س) = نها $\sqrt{1 - s}$

$$1 = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1} = 1$$

النهاية = القيمة

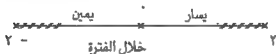
ق (س) متصل عند س = ٢

النهايات والاتصال



مثال ١١: ابحث في اتصال ق(س) = $\sqrt{x-4}$ في الفترة $[-2, 2]$

الحل:

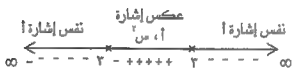


نبحث في اتصال ق(س) عند س = صفر، وعلى اليسار س = 2 وعلى اليمين

س = -2 ولكن نتأكد أن مجاله هو $[-2, 2]$

نجد أصفاره: $x-4 \leq 0$

$(-2) \leq (x+2) \leq 0$



∴ مجاله الفترة $[-2, 2]$

ق(2) = $\sqrt{2-4}$ = صفر

نها ق(س) = صفر
س = 2

من الرسم أو التعويض المباشر

ق(2) = $\sqrt{2-4}$ = صفر

نها ق(س) = صفر من الرسم أو التعويض المباشر
س = -2

ق(0) = $\sqrt{0-4}$ = 2

نها ق(س) = 0 = $\sqrt{0-4}$ ∴ ق(س) متصل على الفترة $[-2, 2]$



النهايات والاتصال

$$\left. \begin{array}{l} \text{جا س} \\ \text{س} \end{array} \right\} = \text{مثال ١٢: ابحث في اتصال ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} \neq \text{صفر (النهاية)} \\ \text{س} = \text{صفر (القيمة)} \end{array} \right\}$$

على ح أو $(-\infty, \infty)$

الحل:

بما أن $\text{س} = \text{صفر نقطة تغيير بالتعويض والقاعدة الأولى افتتان مثلثي متصل}$
والثانية ثابت متصل، لذا نبحث اتصاله في $\text{س} = \text{صفر}$

ق(صفر) = القاعدة الثانية

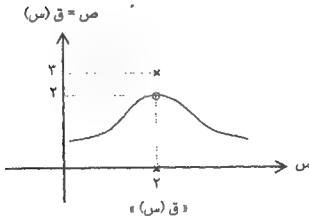
$$\text{نها ق(س) = نها } \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1 \text{ حسب النظرية}$$

$$\therefore \text{ق (س) متصل على ح} = (-\infty, \infty)$$

مثال ١٣: استقرئ منحنيات الاقترانات التالية وبين أيها متصل عند $\text{س} = ٢$

الحل:

التفسير:

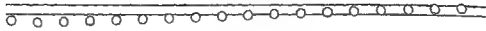


$$\text{ق} (٢) = ٣$$

$$\text{نها ق (س) = ٢}$$

\therefore ق (س) غير متصل كون النهاية \neq القيمة عند $\text{س} = ٢$

النهايات والاتصال



الحل:

$$هـ (٢) = \epsilon$$

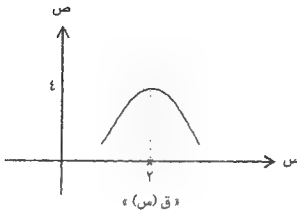
$$\text{نها} هـ (س) = \epsilon$$

$$س \rightarrow \infty$$

∴ هـ (س) متصل

كون القيمة = النهاية

$$\text{عند } س = ٢$$



مثال ١٤: أوجد

$$(١) \text{ نها } \frac{س - ٥ - س - ١}{س + ٢} \quad \begin{matrix} س \rightarrow \infty \\ س \rightarrow \infty \end{matrix}$$

الحل: نكتفي هنا بالحد الذي درجته أعلى في البسط وكذلك في المقام

هكذا:

$$\text{نها } \frac{س}{س} = \frac{١}{٢} \quad \begin{matrix} س \rightarrow \infty \\ س \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \text{نها} = \frac{١}{٢} \quad \begin{matrix} س \rightarrow \infty \\ س \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$(٢) \text{ نها } \frac{س + ٢ - س - ٥}{س - ٢} \quad \begin{matrix} س \rightarrow \infty \\ س \rightarrow \infty \end{matrix}$$

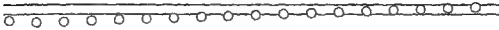
$$\text{الحل: نها } \frac{س}{س} = ١ \quad \begin{matrix} س \rightarrow \infty \\ س \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \text{نها} = ١ \quad \begin{matrix} س \rightarrow \infty \\ س \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \text{كون نهاية الثابت = نفسه}$$

مثال ١٥: أوجد نقط عدم الاتصال في كل من الاقترانات التالية ثم أوجد

مجاله.

$$(١) \text{ ق (س) } \frac{س - ٢}{س + ١}$$





الحل: نصفير الاقتران

س^٢ + ١ = صفر، س^٢ = -١ وهذا لا يجوز كون الطرف الأيمن موجب والأيسر سالب.

∴ لا يوجد نقط عدم اتصال

∴ مجال ق (س) = ح

$$(٢) \text{ ق (س) } = \frac{١ + س^٢}{١ - س^٢}$$

الحل: نصفير المقام

$$س^٢ - ١ = \text{صفر}$$

$$(س + ١)(س - ١) = \text{صفر}$$

$$س = \pm ١$$

∴ س = {١، -١} نقط عدم اتصال

مجاله ح - {١، -١}

$$(٣) \text{ ق (س) } = \frac{١ - \text{جتا}٢س}{س}$$

الحل:

س = صفر نقطة عدم اتصال

∴ مجاله: ح - {٠}

$$(٤) \text{ ق (س) } = \sqrt{س + \frac{١}{س}}$$

الحل:

$$s + \frac{1}{s} \leq \text{صفر}$$

$$\frac{s+1}{s} \leq \text{صفر}$$

✦ ✦ ✦ ✦ ✦ ✦ ✦

إشارة البسيط

- - - + + +

إشارة المقام

∴ $s < \text{صفر مبالغه}$

∴ $s \geq$ صفر فترة عدم الاتصال هنا فترة وليست نقطة.

← مثال ۱۶: آوجد نها $\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4}$

الحل: نفرض أن $\sqrt{s} =$ وبالتربيع

ص^۲ = س

وعندما س ← ٤ ، ص ← ٢ ، ومنها ص ← ٢

$$\therefore \text{نہا} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\text{بالتحليل} \quad \frac{\text{ص}(\text{ص} - 1)}{(\text{ص} + 2)(\text{ص} - 2)} = \frac{\text{ص}^2 - 1}{\text{ص}^2 - 4}$$

نہا $\frac{ص(ص-۲)(ص+۲+۴)}{(ص-۲)(ص+۲)}$ وكذلك التحليل

$$\frac{\text{ص}^2 + 2\text{ص} + 4\text{ص}}{\text{ص} + 2} \quad \begin{matrix} \text{نها} \\ \text{ص} + 2 \end{matrix}$$

النهايات والاتصال

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \text{---} \\ \frac{1+1+1}{4} = \frac{(2)4 + (2)2 + (2)2}{2+2} = \\ 6 = \frac{24}{4} = \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 > 2 \text{ القاعدة الأولى} \\ 2 > 2 \text{ ، } \frac{1}{4} > 2 \text{ ، } \frac{1}{4} > 2 \text{ القاعدة الثانية} \\ 2 \geq 4 \text{ ، } 4 \geq 4 \text{ القاعدة الثالثة} \end{array} \right\} = \text{مثال ١٧: إذا كان ق (س) =}$$

ما هي مجموعة نقط عدم اتصال الاقتران ق (س) ؟

الحل:

نبحث الاتصال عند $s = 2$ ، $s = 4$ كونها نقط تغيير في التعريف

عندما $s = 2$

ق (2) = لا قيمة للاقتران كونه غير معرف عند $s = 2$

∴ عندما $s = 2$ نقطة عدم اتصال

عندما $s = 4$

ق (4) = $4 - 4 = 0$ صفر (عوضنا في القاعدة الثالثة)

نها ق (س)

من $s = 4$

من اليمين: نها ق (س) = $4 - 4 = 0$ صفر القاعدة الثالثة
من $s = 4$

من اليسار: نها ق (س) = $2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ (2) - $\frac{1}{4}$ (16) = 2
من $s = 4$

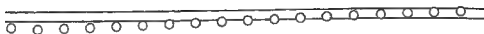
القاعدة الثانية

وبما أن نها ق (س) \neq نها ق (س)

من $s = 4$ من $s = 4$



النهايات والاتصال



∴ نها ق (س) غير موجودة

س ← ٤

لذا فمجموعة نقط عدم اتصال ق (س) = {٢، ٤}

مثال ١٨: إذا كان ق (س) = $\left\{ \frac{1}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢} , س \neq \text{صفر القاعدة الأولى} \right\}$ ، س = صفر القاعدة الثانية

ما قيمة لك ليكون ق (س) متصل عند س = صفر ؟

الحل: ليكون ق (س) متصل عند س = صفر يجب أن يتحقق الشرط التالي:

ق (صفر) = نها ق (س) (أي القيمة = النهاية عند س = صفر)

س ← صفر

ق (صفر) = لك (القاعدة الثانية)

نها ق (س) = نها $\frac{1}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢}$ ، س ← صفر

هنا نضرب البسط والمقام $\frac{1}{٢}$ س أو نقسم البسط والمقام على $\frac{1}{٢}$ س

هكذا:

$$\text{نها } \frac{1}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢} \times \frac{س}{س} = \frac{\frac{س}{٢} \times \frac{س}{٢} \text{ جا } \frac{س}{٢}}{\frac{س}{٢}} = \frac{\frac{س}{٢} \times \frac{1}{س} \text{ نها } \frac{س}{٢}}{\frac{س}{٢}}$$

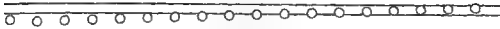
$$= (1) \left(\frac{1}{٢} \right) = \frac{1}{٢}$$

$$\therefore \text{لك} = \frac{1}{٢}$$

فيصبح الاقتران ق (س) = $\left\{ \frac{1}{س} \text{ جا } \frac{س}{٢} , س \neq \text{صفر} \right\}$ ، س = صفر

متصلاً عند س = صفر تحقق من ذلك!

النهايات والاتصال



مثال ١٩: إذا كانت نها $\frac{\sqrt{s-1}-1}{s-2}$ موجودة

ما قيمة أ ؟

الحل: لتكون نهاية الاقتران موجودة يجب أن يُنتج التعويض المباشر لقيمة

$$s \text{ في البسط والمقام الكمية } = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

ومنها البسط = صفر والمقام أيضاً أي أن:

$$\sqrt{s-1}-1=0 \text{ صفر وكذلك } s-2=0 \text{ صفر} \leftarrow s=2$$

$$\therefore \sqrt{1-1}-1=0 \text{ صفر}$$

$$\sqrt{1-1}=1$$

$$\therefore 1=1$$

مثال ٢٠: أوجد «أ» نها $[s+1]$ نها «٢» نها $[s+1]$

س ← ١

س ← ٠.٨

الحل: قاعدة إيجاد نهاية اقتران أكبر عدد صحيح بإيجاز شديد:

«نعوض ما تووّل إليه ٢ في الاقتران فإذا نتج عدد صحيح فالنهاية غير موجودة

وإذ نتج عدد غير صحيح فالنهاية تساوي القيمة».

هكذا:

$$\text{نها } [s+1] \text{ ق } (0.8) = [1+0.8] = [1.8] \text{ والعدد } 1.8 \text{ ق ص}$$

س ← ٠.٨

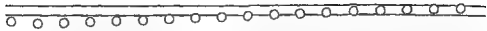
(عدد غير صحيح)

$$\text{لذا فإن نها } [s+1] = [1+0.8] = 1$$

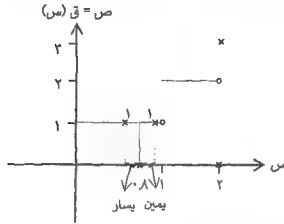
س ← ٠.٨



النهايات والاتصال



(لأن النهاية من اليمين = النهاية من اليسار) كما في الشكل



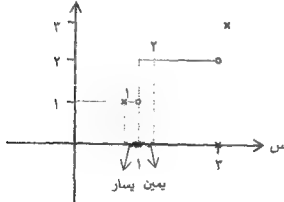
حيث يعرف

$$\left. \begin{array}{l} 1 > 0 \geq s, \\ 2 > 1 \geq s, \\ 2 = s, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = [1 + s]$$

وأما نها $[1 + s] = [1 + 1] = [2]$ والعند $2 \ni$ ص (عدد صحيح) $s \rightarrow 1$

لأن النهاية من اليمين \neq النهاية من اليسار

ص = ق (س)



لذا فإن نها $[1 + s]$ غير موجودة $s \rightarrow 1$

كما في الشكل

نها ق (س) = 2

$s \rightarrow 1^+$

نها ق (س) = 1

$s \rightarrow 1^-$

أي أن نها ق (س) غير موجودة $s \rightarrow 1$

(٢٠ - ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

$$(١) \text{ أوجد نها } \frac{س^١ + ١}{س - ١ + س}$$

{إرشاد: استعن بالقسمة الطويلة أو التركيبية}

$$(٢) \text{ أوجد نها } \frac{س^٢ - ٣}{س^٣ - ٣}$$

{غير موجودة}

(٣) أوجد

$$\{- \frac{١}{١١} , \text{ تعويض مباشر}\}$$

$$«١» \text{ نها } \frac{س^٢ - ٥}{س^٢ + ٣}$$

$$\{١, \text{ إعادة التعريف}\}$$

$$«٢» \text{ نها } \frac{|س|}{س} , س \neq \text{صفر}$$

$$\{٣, \text{ تحليل}\}$$

$$«٣» \text{ نها } \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$$

$$\{١, \text{ متطابقات مشهور}\}$$

$$«٤» \text{ نها } \frac{\text{جتا}^٢ س - \text{جتا}^٢ س}{\text{جتا}^٢ س + \text{جتا}^٢ س}$$

$$(٤) \text{ إذا كانت نها ق (س) = } ٢ - , \text{ نها هـ (س) = } ٣$$

$$س \rightarrow ١$$

$$س \rightarrow ١$$

$$\{- \frac{٢}{٣} , -٦ , -\}$$

$$\text{هما نها ق (س) هـ (س) , نها (} \frac{ق}{هـ} \text{) (س)}$$

$$س \rightarrow ١$$

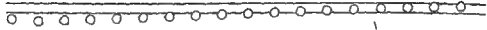
$$\{ \frac{٢}{٣} , \text{ تحليل أو انطاق}\}$$

$$(٥) \text{ أوجد نها } \frac{س(١ - س^٢)}{س^٢ - ٩}$$

$$س \rightarrow ٩$$

$$س \rightarrow ٩$$

النهايات والاتصال



{1، توحيد المقامات}

$$(6) \text{ أوجد نها } \frac{\frac{1}{s} + 2}{\frac{1}{s} + 2 - \infty}$$

(7) أوجد

{2، تعويض مباشر}

$$\text{«1» نها } \frac{2 + s - \sqrt{s^2 - 3s + 2}}{s - \infty}$$

{غير موجودة}

$$\text{«2» نها } \frac{s + 1}{s - 1 - \infty}$$

{\infty، استعن بالرسم}

$$\text{«3» نها } \left| \frac{1}{s} \right|_{s \rightarrow \infty}$$

{\frac{1}{4}، توحيد المقامات}

$$\text{«4» نها } \left(\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s - 4} \right)_{s \rightarrow \infty}$$

(8) أوجد نقط عدم اتصال كل من الافتراضات:

{3، 2 -}

$$\text{«1» ق (س) } \frac{s^2 - 5s + 4}{s^2 - 4}$$

{1، 6 -}

$$\text{«2» ق (س) } \frac{s^2 - 3s + 2}{s^2 + 5s - 6}$$

{لا يوجد}

$$\text{«3» ق (س) } \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

(9) أوجد

{صفر}

$$\text{«1» نها } \frac{2s^2 + s^2 + 5s - 1}{s - \infty}$$

{\frac{1}{4}}

$$\text{«2» نها } \frac{1 + s + s^2}{s^2 + s + 1} \quad s \rightarrow \infty$$

النهايات والاتصال

{ ∞ }

$$\frac{s^2 + s^2 + s^2 + 1}{s^2 - s - 1} \quad \text{نها } \infty$$

{ $-\infty$ ، π ، $\pi + s$ ، $\pi - s$ }

$$\frac{\pi + s}{\pi - s} \quad \text{نها } \pi$$

{ 2π ، تحليل}

$$\frac{(s^2 - s - 2)(s^2 + 2)}{s^2 - 2} \quad \text{أوجد نها } (10)$$

{ 3 ، متصل عند $s = 3$ }

$$(11) \text{ هل الاقتران ق (س) } = \frac{s^2 - 3}{|s^2 - 3s + 6|} \text{ متصل عند } s = 3$$

(12) أوجد نقط عدم الاتصال للاقتران

{ 1 ، $-\infty$ }

$$\left. \begin{array}{l} s^2 \geq 1 \\ s^2 > 1 \\ s \leq 1 \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

(13) ما قيمة م التي تجعل الاقتران

{ 3 ، $-\infty$ }

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + 1 \leq s^2 \\ s^2 + m > s^2 \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

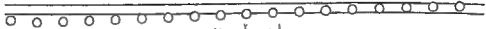
{متصل}

$$\left. \begin{array}{l} s^2 \geq 1 \\ s^2 < 1 \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

{ 0 ، ضرب البسط والمقام بالكمية s^2 }

$$(15) \text{ أوجد نها } \frac{s^2}{s^2} \text{ جأ س } \neq \text{صفر } s^2$$

النهايات والاتصال



$$(١٦) \text{ ابحث في اتصال ق (س) } = \frac{\text{س}^١ + \text{س}^٢ - ٢}{\text{س}^٢ - ١} \text{ عند س} = ١$$

{ غير متصل عند س = ١ }

$$(١٧) \text{ ابحث في اتصال ق (س) } = \sqrt{\text{س} - ١} \text{ عند س} = ١$$

{ غير متصل عند س = ١ ، استعن بالرسم والنهاية من اليمين واليسار }

(١٨) احسب النهايات التالية :

$$\left\{ \frac{١٥}{٧} \right\}$$

$$\text{نها } \frac{٥ \text{ جا } ١}{\text{س} - ٤}$$

$$\left\{ \frac{٣}{٢} , \text{ انطاق البسط} \right\}$$

$$\text{نها } \frac{\sqrt{٣س^٣ - ٢س} - \sqrt{٣س^٣ + ٢س}}{\text{س}}$$

(١٩) أوجد

$$\left\{ \sqrt{\frac{٥}{٧}} \text{ تعويض مباشر} \right\}$$

$$\text{نها } \frac{1}{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}$$

$$\{ ٢ \}$$

$$\text{نها } \frac{٢س}{\text{س}}$$

(٢٠) ابحث في اتصال الاقتران:

$$\text{ق (س) } = \left. \begin{array}{l} ٢س - ٤ , ٢ > \text{س} \\ ٢س + ٤ , ٢ \leq \text{س} \end{array} \right\}$$

{ غير متصل عند س = ٢ }

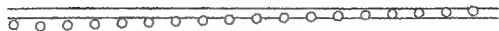
عند س = ١

$$\left\{ \frac{٢}{٥} \right\}$$

$$(٢١) \text{ أوجد نها } \frac{\sqrt{١ + \text{س}}}{١ - ٢س}$$



النهايات والاتصال



{ صفر }

$$(22) \text{ أوجد نها } \frac{\text{جاس} - 1}{\text{س}}$$

{ $-\frac{3}{8}$ ، توحيد مقامات }

$$(23) \text{ أوجد نها } (1 - \frac{2}{\text{س}}) (\frac{3}{\text{س} - 4})$$

{ غير موجودة }

$$(24) \text{ أوجد نها } \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

(25) أوجد

{ صفر }

$$(1) \text{ نها } \frac{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4}{\text{س} - 2}$$

{ غير موجودة }

$$(2) \text{ نها } \frac{\text{س} - 2}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4}$$

{ 0 }

$$(3) \text{ نها ق (س)} = \left. \begin{array}{l} 3 - \text{س} , \text{س} \neq 2 \\ 45 , \text{س} = 2 \end{array} \right\}$$

{ غير موجودة }

$$(4) \text{ نها } \left. \begin{array}{l} 2 - \text{س} , \text{س} \geq 1 \\ \text{س} , \text{س} < 1 \end{array} \right\}$$

(26) أبحث في اتصال الاقتربات التالية:

{ متصل }

$$(1) \text{ ق (س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س}^2 , \text{س} \geq 1 \\ \text{س} , \text{س} < 1 \end{array} \right\} \text{ عند } \text{س} = 1$$

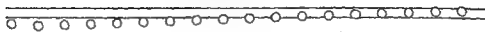
{ متصل }

$$(2) \text{ ق (س)} = \sqrt{\text{س} - 4} , \text{ في الفترة } [2, 2]$$

{ متصل }

$$(3) \text{ ق (س)} = \text{س جاس} + 1 , \text{ على ح}$$





(٢٧) إذا كان $ق(س) = \frac{جاس}{س}$ ، $س \neq \text{صفر}$

أعد تعريف الاقتران ليصبح متصلًا على ح

$$\left\{ \begin{array}{l} ق(س) = \frac{جاس}{س} , س \neq \text{صفر} \\ ق(س) = ١ , س = \text{صفر} \end{array} \right\}$$

$$\frac{س^٥ - ١}{س^٤ - ١} \text{ أوجد نها } س \rightarrow ١$$

{إرشاد: اقسم البسط على $س - ١$ وحل المقام}

$$\left\{ \frac{١}{٦} \right\}$$

$$\frac{\sqrt[٣]{س^٣ - ٢} - \sqrt[٣]{س^٣ + ٢}}{س} \text{ أوجد نها } س \rightarrow ٠$$

{إرشاد: انطاق البسط}

$$\{١\}$$

$$\frac{س^٢ + ١}{س^٢ - ١} \text{ أوجد نها } س \rightarrow \infty$$

(٢١) ابحث في اتصال الاقتران $ق(س) = \frac{س^٢ + ٢س^٢ + ٣}{س^٢ - ٢س + ٣}$ عند $س = ١$ ، $س = ٣$
{غير متصل، متصل}

$$\left\{ \frac{١}{١٢} \right\} \text{ انطاق البسط}$$

$$\frac{\sqrt[٣]{س^٣ - ٢} - \sqrt[٣]{س^٣ + ٢}}{س^٤ - ٤س^٥} \text{ أوجد نها } س \rightarrow ٤$$

$$\{\text{غير موجودة}\}$$

$$\frac{\sqrt[٣]{س^٣ - ١}}{س - ١} \text{ أوجد نها } س \rightarrow ١$$

(٢٤) أوجد

النهايات والاتصال

{ انطق البسط والمقام، $\frac{2}{y}$ }

$$\text{نها « ١ »} \quad \frac{2 - \sqrt{2+s}}{2 - \sqrt{2+s}} \quad s \rightarrow \infty$$

{ ٠ }

$$\text{نها « ٢ »} \quad \frac{\text{جا } s}{\text{جا } 2s} \quad s \rightarrow \infty$$

{ صفر، عوض بدلاً من ظا $\frac{\pi}{y}$ }

$$\text{نها « ٣ »} \quad \frac{\pi}{\pi} \quad \text{ظا (١ + جتا } s) \quad s \rightarrow \infty$$

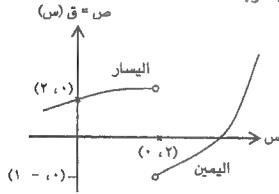
$$\left\{ \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y} - 1} \right\}$$

$$\text{نها « ٤ »} \quad \frac{\text{جتا } s - \text{جتا } 1}{\frac{\pi}{y}} \quad s \rightarrow \infty$$

{ صفر }

$$\text{نها « ٥ »} \quad \frac{s - 1 + 5s}{s^2 + 6} \quad s \rightarrow \infty$$

(٣٥) اعتماداً على الأشكال المجاورة التالية أوجد:



« شكل ١ »

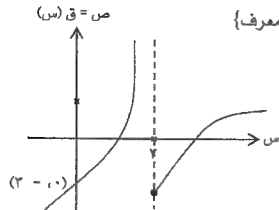
« الشكل ١ »

$$\text{نها ق(س) « ١ »} \quad s \rightarrow \infty$$

$$\text{نها ق(س) « ٢ »} \quad s \rightarrow \infty$$

$$\text{نها ق(س) « ٣ »} \quad s \rightarrow \infty$$

{ غير موجودة }



« شكل ٢ »

{ الاقتران غير معرف }

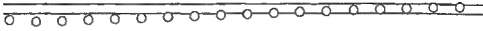
$$\text{نها ق(٢) « ٣ »}$$

« الشكل ٢ »

$$\text{نها ق(س) « ١ »} \quad s \rightarrow \infty$$

$$\text{نها ق(س) « ٢ »} \quad s \rightarrow \infty$$

النهايات والاتصال

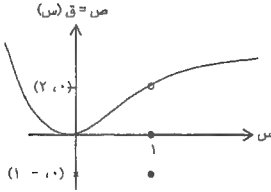


{غير موجودة} « ٣ نها ق (س) »

س ← ٢

{ - ٣ } « ٤ ق (٢) »

« الشكل ٣ »



« ١ نها ق (س) »

س ← ١

« ٢ نها ق (س) »

س ← ١

{ ٢ } « ٣ نها ق (س) »

س ← ١

{ - ١ } « ٤ ق (١) »

« شكل ٣ »

$$(٣٦) \text{ إذا كان ق (س) } = \left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} < ١ \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{س} + ١ \end{array}$$

{صفر، نأخذ القاعدة الأولى فقط}

أوجد نها ق (س)

{صفر، تحليل}

$$(٣٧) \text{ أوجد نها } \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ٤} \quad \text{س} \leftarrow ٤$$

{غير موجودة}

$$(٣٨) \text{ أوجد نها } \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٣ - ١} \quad \text{س} \leftarrow ١$$

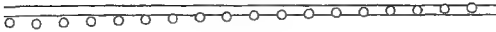
إرشاد: استعن بنظرية العوامل والقسمة التركيبية بعد التحليل إلى العوامل

حيث س - ١ عامل مشترك بين البسط والمقام.

$$(٣٩) \text{ ابحث في اتصال الاقتران ق (س) = ظا } \sqrt{\frac{\pi}{٢} - \text{س}} \text{ عند س = } \frac{\pi}{٢}$$

{غير متصل}

إرشاد: أوجد مجاله أولاً والنهاية من اليمين واليسار



$$\left\{ \frac{2}{\pi}, \text{ تعويض مباشر} \right\}$$

$$(40) \text{ أوجد نها } \frac{\text{جا } \left(\frac{\pi}{2} + s \right)}{\frac{\pi}{2} + s} \text{ س } \rightarrow$$

$$(41) \text{ ما قيمة أليكون ق (س) } = \left. \begin{array}{l} s^2 - 1, \text{ س } \geq 2 \\ s^2 + 5s + 4, \text{ س } \leq 2 \end{array} \right\} \text{ متصلاً عند س } = 2$$

$$\{-1\}$$

$$\{\text{صفر}\}$$

$$(42) \text{ ما نها } \frac{\text{س} - 2\sqrt{1+s}}{1-s} \text{ س } \rightarrow$$

إرشاد: تحليل أو انطاق

$$\{2\}$$

$$(43) \text{ «1» ما نها } \frac{\text{جا } 2\text{س}}{\text{س}} \text{ س } \rightarrow$$

$$\{2 \text{ جتا } 1\}$$

$$\frac{\text{جا } (1+s) - \text{جا } (1-s)}{\text{س}} \text{ س } \rightarrow$$

إرشاد: حول الفرق إلى حاصل ضرب

$$\left\{ \frac{1}{12} \right\}$$

$$\text{«3» ثم نها } \frac{\text{جا } (2-s)}{8-s^2} \text{ س } \rightarrow$$

إرشاد: عوض ص = س - 2

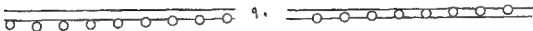
$$\{6\}$$

$$(44) \text{ ما نها } \frac{\text{س}^2 - 8\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - 4} \text{ س } \rightarrow$$

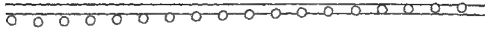
إرشاد: افرض ص = $\sqrt{\text{س}}$

$$\left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

$$(45) \text{ أوجد نها } \frac{1 + \text{جتا } 2\text{س}}{\frac{\pi}{2} - (\pi + 2\text{س})} \text{ س } \rightarrow$$



النهايات والاتصال



إرشاد: افرض $ص = س + \frac{\pi}{4}$ واستخدم متطابقات مثلثية عدة

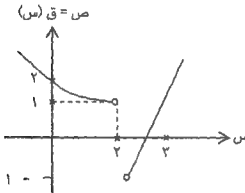
$$\{1\} \quad (٤٦) \quad \text{إذا كان ق(س) = س}^2 + س, \text{ أحسب نها} \frac{\text{ق(١+هـ) - ق(١)}}{\text{هـ}}$$

(٤٧) ابحث في اتصال الاقتران

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق(س)} = \frac{\text{س}^2 + \text{س}}{\text{س}} \\ \text{س} \neq \text{صفر} \\ \text{س} = \text{صفر} \end{array} \right\}$$

عندما $\text{س} = \text{صفر}$

{غير متصل}



(٤٨) من الشكل المرفق أوجد:

«١» نها ق(س)

$\text{س} \rightarrow ٢^+$

«٢» نها ق(س)

$\text{س} \rightarrow ٢^-$

«٣» نها ق(س)

$\text{س} \rightarrow ٢$

{-١، ١، غير موجودة}

(٤٩) من الشكل المجاور أوجد:

نها ق(س)

$\text{س} \rightarrow ٠^+$

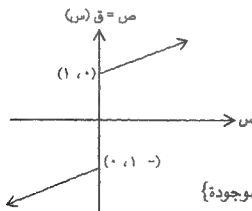
نها ق(س)

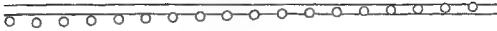
$\text{س} \rightarrow ٠^-$

ثم نها ق(س)

$\text{س} \rightarrow ٠$

{-١، ١، غير موجودة}





(٥٠) أوجد نها كل من:

$$\left\{ \frac{1}{2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}} \right\}$$

$$\text{« ١ » نها} \quad \frac{2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}}$$

إرشاد: تحليل أو انطاق

$$\{1 -\}$$

$$\text{« ٢ » نها} \quad \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

إرشاد: توحيد المقامات

$$\{\text{غير موجودة}\}$$

$$\text{« ٣ » نها} \quad \frac{n}{n^2 - 1 + \frac{1}{n}}$$

إرشاد: انطاق

$$\{1 - \cos \frac{1}{n}\}$$

$$\text{« ٤ » نها} \quad \frac{\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

إرشاد: تعويض مباشر

$$(٥١) \text{ إذا كان ق (س) = } \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{n} , \quad 1 < n \\ 1 - \frac{1}{n} , \quad n \geq 1 \end{array} \right\} \text{ أوجد نها ق (س)}$$

$$\{\text{غير موجودة}\}$$

$$\{\text{غير موجودة}\}$$

$$(٥٢) \text{ أوجد نها} \quad \frac{\cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$$

$$\left\{ \frac{2}{0} \right\}$$

$$(٥٣) \text{ أوجد نها} \quad \frac{2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}}$$



النهايات والاتصال

$$\{2\} \quad \text{ونها} \quad \frac{\pi}{2} - s \quad \frac{\pi}{2} - s$$

$$(54) \text{ ما قيمة } m \text{ في الاقتران } (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 2m \geq 2 - s, \\ s^2 - 2 \geq 1, \end{array} \right\} \text{ ليكون متصلاً عند } s = 1$$

$$(55) \text{ إذا كان } (s) = \frac{s^3}{s-2}, \quad s \neq 2, \text{ هـ } (s) = \left. \begin{array}{l} s \geq 5, \\ s^2 - 8 < s, \end{array} \right\} \text{ ابحث في اتصال } (s) \text{ عند } s = 1$$

$$(56) \text{ أوجد نها} \quad \frac{1 + \text{جتاس}}{\text{جا } s} \quad \text{س} \rightarrow \pi$$

إرشاد: انطاق البسط ثم القيمة المطلقة

$$(57) \text{ إذا كان } (s) = \left. \begin{array}{l} \frac{s^2 - (2-2)s - 6}{s-2}, \\ s \neq 2, \end{array} \right\} \text{ متصلاً عند } s = 3 \text{ فما قيمة جـ}$$

$$(58) \text{ إذا كان } (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 2, \\ s^2 - 2 < |s|, \end{array} \right\} \text{ ابحث في اتصال } (s) \text{ على مجاله}$$

إرشاد: أعد تعريف الاقتران بفك القيمة المطلقة هكذا

$$s \geq 2 \rightarrow 2 \leftarrow 2 < |s|, \quad s \geq 2 \rightarrow 2 < |s| \text{ أو } s < -2 \rightarrow 2 < |s|$$

النهايات والاتصال

$$\left\{ \frac{3}{2} \right\} \quad \frac{\sqrt{s+2}-2}{\sqrt{s+3}-2} \quad \text{أوجد نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 2 \\ \text{س} \rightarrow 3 \end{matrix}$$

إرشاد: انطق البسيط والمقام

$$(60) \text{ إذا كان ق (س) = } \sqrt{s}, \text{ س} < \text{صفر}, \text{ هـ (س) = س}^2 - 4$$

$$\{ \overline{0} \} \quad \text{أوجد نها (ق هـ) (س)} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 3 \\ \text{س} \rightarrow 2 \end{matrix}$$

(61) أوجد:

$$\frac{\sqrt{s}}{s} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 0 \\ \text{س} \rightarrow \infty \end{matrix} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\sqrt{s}}{s} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow \infty \\ \text{س} \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\{ \text{غير موجودة للجميع} \} \quad \frac{\sqrt{s}}{s} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow \infty \\ \text{س} \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\sqrt{s}}{s} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 0 \\ \text{س} \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$\{ \overline{2} - 5 \} \quad \frac{\sqrt{s+1}-1}{s-2} \quad \text{أوجد نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 2 \\ \text{س} \rightarrow 3 \end{matrix}$$

(62) أوجد:

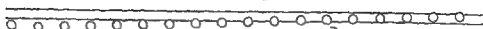
$$\{ 256 - \} \quad \frac{256 - \sqrt{x}}{x+4} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} x \rightarrow 4 \\ x \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$\{ \overline{2} \} \quad \frac{\sqrt{s-4}-s}{s-2} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 2 \\ \text{س} \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad \frac{\frac{1}{s+4} - \frac{1}{s}}{s} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow \infty \\ \text{س} \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\{ 27 \} \quad \frac{s-27}{s-3} \quad \text{نها} \quad \begin{matrix} \text{س} \rightarrow 3 \\ \text{س} \rightarrow \infty \end{matrix}$$

النهايات والاتصال



$$\left. \begin{array}{l} 2s+1, s < 1 \\ s+1, s \geq 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

{2}

أوجد نها ق (2-س)

س ← 1

إرشاد: ضع ص = 2 - س

{\frac{2}{3}}

$$\frac{1 - \sqrt{1 - s}}{1 - s} \text{ أوجد نها (65)}$$

إرشاد: ضع س = ص² = ص^{2/2} حاصل ضرب الأدلة

(66) بين أن:

$$\text{«1» نها } \frac{\text{جا } 2\text{س} - \text{جا } 2\text{ا}}{1 - \text{س}} = 2 \text{ جتا ا}$$

إرشاد: تحويل إلى ضرب في البسط

$$\text{«2» نها } \frac{\text{ظتا } (\frac{\pi}{2} - \text{س})}{\text{جا س}} = 1$$

إرشاد: ظتا = \frac{\pi}{2} - س = ظا س

$$\text{«3» نها } \frac{2 \text{ جا } (\text{س} - \text{ص})}{\text{س}^2 - \text{ص}^2} = \frac{1}{\text{ص}}$$

$$\text{«4» نها } \frac{\text{س}^2 \text{ جتا س} + \pi^2}{\pi - \text{س}} = \pi^2$$

إرشاد: نطرح π^2 جتا س ثم نضيفها في البسط ونحلل

{غير متصل}

$$\text{(67) ابحث في اتصال ق (س) } \frac{|s^2 - 5s + 6|}{s - 2} \text{ عند س = 2}$$



النهايات والاتصال

$$\{2\} \quad \frac{(س + ه) - 2س}{ه} \quad \text{أوجد نها} \quad \frac{2س - 2س}{ه}$$

$$\{69\} \quad \frac{48 - 2س}{20 - 5س} \quad \text{نها} \quad \frac{2س + 2س}{1 + 1س} \quad \text{ونها} \quad \frac{2س - 2س}{1 + 1س}$$

(70) أوجد:

$$\{6-\} \quad \frac{2 - 6س}{\frac{1}{7} - 1س} \quad \text{نها} \quad \frac{2 - 6س}{\frac{1}{7} - 1س}$$

$$\{\frac{1}{2}\} \quad \frac{\sqrt{2س} - \sqrt{2س}}{2س - 2س} \quad \text{نها} \quad \frac{\sqrt{2س} - \sqrt{2س}}{2س - 2س}$$

إرشاد: تحليل أو انطاق

$$\{1-\} \quad \frac{\frac{1}{\sqrt{2س}} + \sqrt{2س}}{\frac{1}{\sqrt{2س}} - \sqrt{2س}} \quad \text{نها} \quad \frac{\frac{1}{\sqrt{2س}} + \sqrt{2س}}{\frac{1}{\sqrt{2س}} - \sqrt{2س}}$$

إرشاد: توحيد المقامات في البسط والمقام

$$\{1\} \quad \frac{\sqrt{1س - 1س} - \sqrt{1س - 1س}}{س} \quad \text{نها} \quad \frac{\sqrt{1س - 1س} - \sqrt{1س - 1س}}{س}$$

$$\{\text{غير موجودة}\} \quad \frac{\sqrt{9 - 2س}}{3 - 2س} \quad \text{نها} \quad \frac{\sqrt{9 - 2س}}{3 - 2س}$$

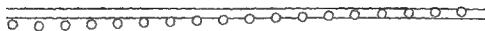
إرشاد: انطبق البسط ثم حل علماء أن المرافق هو $\sqrt{9 - 2س}$ نفسه

(71) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى هـ (س) أجب عما يلي:

$$\{1\} \quad \text{نها هـ (س)} \quad \frac{2س - 2س}{ه}$$



النهايات والاتصال



«٢» نها هـ (س)

س ← ٢

«٣» نها هـ (س)

س ← ٢

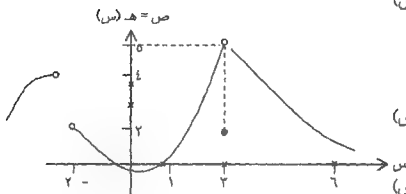
«٤» هـ (٢)

«٥» نها هـ (س)

س ← ٢

«٦» نها هـ (س)

س ← ٢



«٩» نها هـ (س)

س ← ٤

«٧» نها هـ (س)

س ← ٢

«١٠» هـ (٤)

«٨» هـ (٢ -)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - ١ < ٢ \\ \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

ايحـث في اتصاله عندما س = صفر

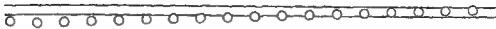
$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - ١ < ٢ \\ \text{س} = ٢ \\ \text{س} < ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

أوجد نها ق (س) ، ق (٢) ، هل ق (س) متصل عند س = ٢ ؟

س ← ٢

$$\begin{array}{l} \text{س} + ٢ \\ \text{س} - ١ \end{array} \quad \text{أوجد نها (٧٤)}$$

س ← ١



(٧٥) أوجد:

$$\frac{\text{س}^2 - ٤}{\text{س}^2 - ٨} \text{ نها } \begin{matrix} \text{س}^2 - ٢ \\ \text{س}^2 - ٨ \end{matrix}$$

$$\frac{\text{س}^2 - ٨}{\text{س}^2 - ٤} \text{ نها } \begin{matrix} \text{س}^2 - ٨ \\ \text{س}^2 - ٤ \end{matrix}$$

{غير موجودة}

$$\frac{\text{س}^2 - ٣}{\text{س}^2 - ٩ + \text{س}} \text{ نها } \begin{matrix} \text{س}^2 - ٣ \\ \text{س}^2 - ٩ + \text{س} \end{matrix}$$

{صفر}

$$\frac{\text{س}^2 - ٩ + \text{س}}{\text{س}^2 - ٣} \text{ نها } \begin{matrix} \text{س}^2 - ٩ + \text{س} \\ \text{س}^2 - ٣ \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \text{س}^2 & \text{س} > ٣ \\ \text{س} & \text{س} = ٣ \\ ٢ + \text{س} & \text{س} < ٣ \end{matrix} \right\} = \text{(٧٦) إذا كان ق (س)}$$

{متصل}

عند س = ٣

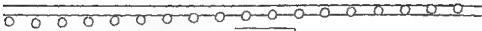
(٧٧) إذا كان ق (س) = س^٢ - س^٤ أوجد:

$$\frac{\text{ق (س)} - \text{ق (١)}}{\text{س} - ١} \text{ نها } \begin{matrix} \text{ق (س)} - \text{ق (١)} \\ \text{س} - ١ \end{matrix}$$

$$\frac{\text{ق (س)} - \text{ق (٢)}}{\text{س} - ٢} \text{ نها } \begin{matrix} \text{ق (س)} - \text{ق (٢)} \\ \text{س} - ٢ \end{matrix}$$

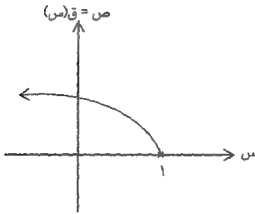
$$\frac{\text{ق (س)} - \text{ق (٣)}}{\text{س} - ٣} \text{ نها } \begin{matrix} \text{ق (س)} - \text{ق (٣)} \\ \text{س} - ٣ \end{matrix}$$

$$\frac{\text{ق (س)} - \text{ق (٤)}}{\text{س} - ٤} \text{ نها } \begin{matrix} \text{ق (س)} - \text{ق (٤)} \\ \text{س} - ٤ \end{matrix}$$



(٧٨) إذا كان منحنى $q(s) = \sqrt{s-1}$ هو الشكل المجاور

أوجد:



نها $q(s)$

$s \rightarrow 1^+$

نها $q(s)$

$s \rightarrow 1^-$

نها $q(s)$

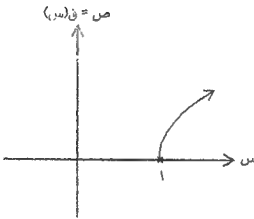
$s \rightarrow 1$

{غير موجودة، صفر، غير موجودة}

إرشاد: مجال $q(s)$ هو $s - 1 \leq \text{صفر} \leftarrow s - 1 \geq \text{صفر}$

(٧٩) إذا كان منحنى $q(s) = \sqrt{s-1}$ هو الشكل المجاور

أوجد:



نها $q(s)$

$s \rightarrow 1^+$

نها $q(s)$

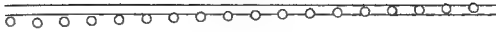
$s \rightarrow 1^-$

نها $q(s)$

$s \rightarrow 1$

إرشاد: مجال $q(s)$ هو $s - 1 \leq \text{صفر}$

النهايات والاتصال



(٨٠) احسب:

{غير موجودة}

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{«1» نها} \\ \frac{\sqrt{4s^2 - 4s + 2}}{s^2 - 6s + 2} \end{array} \right.$$

إرشاد: $\sqrt{4s^2 - 4s + 2} = \sqrt{(s-2)^2} = |s-2|$ أو $|s-2|$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{«2» نها} \\ \frac{1-s}{1+s} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{«3» نها } [s+2] \\ \frac{1}{s} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{«4» نها } |s-1| \\ s-1 \end{array} \right.$$

$$(٨١) \text{ إذا كان ق (س) = } \left\{ \begin{array}{l} \frac{2s^2 - 5s + 2}{2s^2 - 3s + 1} \text{ ، } s < 1 \\ \text{ب} \text{ ، } s \geq 1 \end{array} \right.$$

{١}

ما قيمة ب لتكون نها ق(س) موجودة

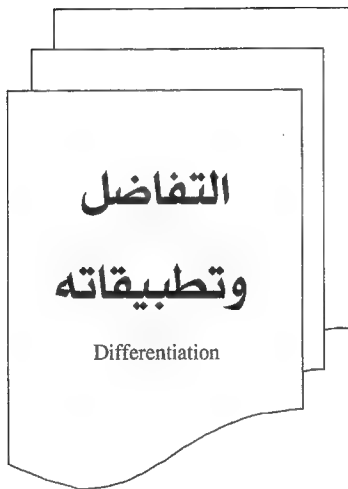
س ← ١

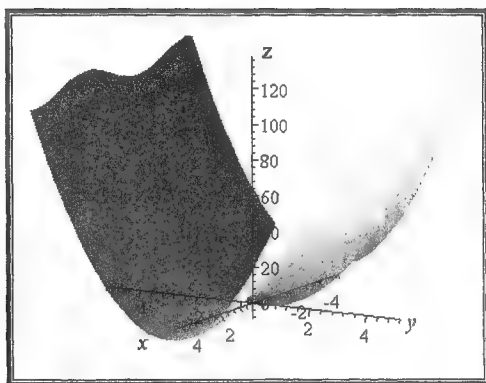
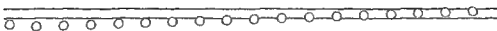
{٦}

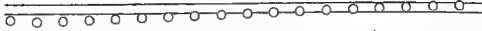
$$(٨٢) \text{ أوجد نها } \frac{5(2+3h) - 40}{s^2 - 2} \text{ س ← ١٠}$$

إرشاد: فك القوس









يُفسر التفاضل رياضياً بأنه عملية إيجاد المشتقة الأولى للاقتران والتي ترتبط بالمماس وميله في الهندسة التحليلية ولتوضيح هذا المفهوم نبدأ بمناقشة متوسط التغير لصلاته الوثيقة بعملية الاشتقاق أو عملية إيجاد المشتقة الأولى (البنية البناء في حساب التفاضل) هكذا:

(٢١ - ١) متوسط التغير Average of Change

التغير سمة من سمات الحياة الملازمة لها باستمرار، نلاحظها هنا وهناك؛ فالإنسان بعد أن يولد ينمو ويتزعزع ويتغير من حيث السن والوزن والشكل، فسبحان الذي لا يتغير كونه وحده الله.

ولكننا سنناقش التغير بطرق رياضية بحثه كما يلي:

(١) التغير في s ، هو الفرق بين قيمتي المتغير s (المتغير المستقل في الاقتران s = $Q(s)$) عندما يزداد أو يقل من s_1 إلى s_2 ويرمز له بالرمز Δs ويقرأ دلتا s أي أن:

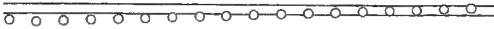
$$\Delta s = s_2 - s_1 \quad \leftarrow \quad (١)$$

وهذا الفرق عدد حقيقي سواء أكان موجب أو سالب أو كسر (عدد نسبي) أو جذر:

(٢) التغير في v ، هو الفرق بين قيمتي المتغير v (المتغير التابع في الاقتران v = $Q(s)$) عندما يزداد أو يقل كونه يتبع في تغيره المتغير المستقل s ، أي أن:

$$\Delta v = v_2 - v_1 \quad \leftarrow \quad (٢)$$

ولما كان $v = Q(s)$ فإن



$$ص_1 = ق(س_1) ، ص_2 = ق(س_2)$$

$$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1) \quad \leftarrow (2)$$

(2) من المعلوم أن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ هو خارج قسمة التغير في $\Delta ص$ على التغير في $\Delta س$ أي أن:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} \quad (\text{من } (1) ، (2) \text{ السابقين})$$

وهذا ما يسمى بمتوسط التغير كما في الشكل أي أن:

$$\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

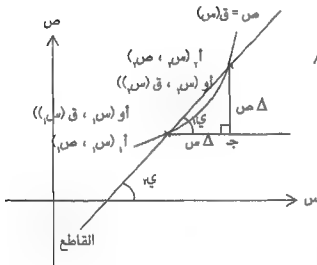
والخط المستقيم $أ_1 أ_2$

يسمى القاطع Asecant Line

حيث يقطع منحنى

الاقتران $ق(س)$ في

النقطتين $أ_1 ، أ_2$



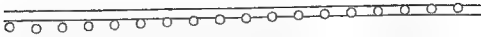
وإن $\angle ي$ هي الزاوية التي يصفها القاطع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أي هي الزاوية المحصورة بين القاطع $أ_1 أ_2$ ومحور السينات.

ولما كانت $\angle ي = \angle ي_1$ أو العكس (بالتناظر)

$$\text{وكذلك ظا } ي = \frac{\Delta ص}{\Delta س} \quad (\text{المثلث } أ_1 ج أ_2 \text{ قائم الزاوية})$$

التفاضل وتطبيقاته



وبما أن ظا ي = ميل القاطع (كما هو واضح من الهندسة التحليلية)

$$\text{فإن } \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \text{ميل القاطع} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} \quad \leftarrow \text{④}$$

هذه العلاقة تترجم معنى متوسط التغير هندسياً والذي هو ميل القاطع أ، أي

$$\text{أي أن } \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \text{ظا ي} = \text{ميل القاطع (هذا هو المعنى الهندسي).}$$

وهناك معنى آخر لمتوسط التغير $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$ وهو المعنى الفيزيائي والدال على

السرعة المتوسطة ورمزها \bar{v} .

فعندما يتحرك جسيم فإن المسافة التي يقطعها ترتبط بالزمن، لذا فإنه

يتحرك تبعاً للاقتران $l = f(t)$ وإذا ما تغيرت t أثناء حركته من t_1 إلى t_2

فإن f تتغير أيضاً وتبعاً لذلك من $f(t_1)$ إلى $f(t_2)$ حيث t الزمن، $f(t)$

المسافة وعندها.

$$\bar{v} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \leftarrow \text{⑤}$$

السرعة المتوسطة

مثال: إذا كان q (س) = s^2 ، وكانت $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 3$

$$\text{احسب } \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ ب}} :$$

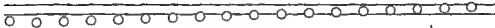
الحل:

$$\Delta \text{ س} = \text{س}_2 - \text{س}_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta \text{ ص} = q(\text{س}_2) - q(\text{س}_1) = q(3) - q(2) = 9 - 4 = 5$$



التفاضل وتطبيقاته



$$0 = \frac{5}{1} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} \therefore$$

هذا ويمكن إيجاد $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$ مباشرة من القانون:

$$\frac{v_2 - v_1}{1} = \frac{q(2) - q(1)}{2 - 1} = \frac{q(s_2) - q(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$$

$$0 = \frac{5}{1} = \frac{4 - 9}{1} =$$

مثال: إذا كان منحى الاقتران $q(s)$ يمر بالنقطتين أ(٤، ٦)، ب(٢، ٢)،

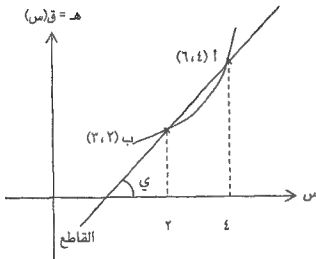
أوجد متوسط التغير للاقتران في الفترة [٢، ٤].

$$\text{الحل: بما أن متوسط التغير} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \text{م القاطع} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\text{فإن} \frac{\text{فرق الصادين}}{\text{فرق السيني}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{6 - 2}{4 - 2} =$$

وهذا العدد الحقيقي $\left(\frac{2}{2}\right)$ هو:



(١) متوسط التغير للاقتران

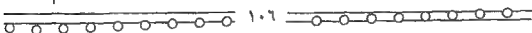
$q(s)$ في الفترة [٢، ٤]

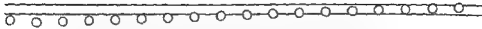
(٢) وهو نفسه م القاطع

الواصل بين النقطتين أ،

ب كما في الشكل.

(٣) وهو نفسه ظل الزاوية،





ظا ي التي يصنعها القاطع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$$1,500 = \frac{2}{3} = \text{أي أن ظا ي}$$

من الآلة الحاسبة: فإن $\angle \text{ي} = 56^\circ$

أي أن القاطع يصنع زاوية قياسها 56° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

مثال: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم أثناء سقوطه إلى أسفل

تغطي بالعلاقة $f(t) = 5t^2 - 20t + 20$ حيث f المسافة بالأمتار t الزمن بالثواني

احسب سرعته المتوسطة في الفترة $[2, 3]$

الحل:

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \text{بما أن } \Delta$$

$$\frac{\{5(3)^2 - 20(3) + 20\} - \{5(2)^2 - 20(2) + 20\}}{3 - 2} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \text{فإن } \Delta$$

$$20 + 60 - 40 - 90 =$$

$$50 \text{ م/ث السرعة المتوسطة.}$$

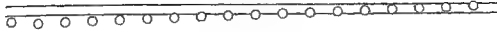
(٢١ - ٢) المشتقة الأولى The First Derivative

والآن سنناقش عملية إيجاد المشتقة الأولى:

والمشتقة الأولى من الأدوات الأساسية في الرياضيات والمدخل المنطقي السليم

لدراسة التغير والتغيرات التي تحدث في الاقترانات الحقيقية وتطبيقاتها المتنوعة

والمستخدمة في الأبحاث العلمية المتقدمة.



نبدأ من حيث انتهينا أي بمتوسط التغير:

$$\text{بما أن } \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ق (س)} - \text{ق (س}_1\text{)}}{\text{س} - \text{س}_1} \text{ كما مر سابقاً}$$

ولما كانت $\Delta \text{ س} = \text{س} - \text{س}_1$ حسب مفهوم التغير \leftarrow فإن $\text{س}_1 = \text{س} + \Delta \text{ س}$

عندها يصبح $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ق (س)} - \text{ق (س}_1\text{)}}{\Delta \text{ س}}$ ، $\Delta \text{ س} \neq \text{صفر}$ (هذا الشرط تحمله ج س في طبيعتها كونها التغير)

وإذا رمزنا للكمية $\Delta \text{ س}$ بالرمز هـ للسهولة فقط.

فإن $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ق (س)} - \text{ق (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ ، هذا هو متوسط التغير بصورة أخرى

ولما كانت المشتقة الأولى (ورمزها ق (س) أو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ أو ص أو $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$)

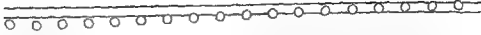
للاقتران $\text{ص} = \text{ق (س)}$ على الفترة [أ، ب] هي اقتران آخر قيمته عند أي نقطة مثل س_1 هي حسب هذين التعريفين:

(١) ق (س) = نها $\frac{\text{ق (س)} - \text{ق (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ وكانها نهاية متوسط التغير، شرط أن تكون النهاية موجودة.

«هذا التعريف للمشتقة الأولى عند نقطة»

(٢) وبشكل عام

ق (س) = نها $\frac{\text{ق (س)} - \text{ق (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ هذا التعريف للمشتقة الأولى بشكل عام.



وتعريف المشتقة سواء أكان بشكل عام $Q'(s)$ أو عند نقطة $Q'(s_1)$ بالغ الأهمية كون عملية إيجاد $Q'(s)$ ، $Q'(s_1)$ بواسطة هذا التعريف هي ما يُطلق عليها اسم التفاضل، هالتفاضل بإيجاز شديد:

«هو عملية إيجاد المشتقة الأولى من التعريف أو من المبادئ الأولية كما يحلو للبعض أن يُسميه» كما في الأمثلة التالية:

مثال: بواسطة التعريف أوجد $Q'(s)$ للاقتزان $Q(s) = s^2$

هنا نستخدم التعريف العام للمشتقة الأولى هكذا:

$$Q'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(s+h) - Q(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(s+h)^2 - s^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s + h}{1} = 2s$$

ثانياً s بدلاً من s

$$Q'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s + h}{1} = 2s$$

$$Q'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s + h}{1} = 2s$$

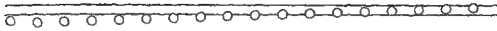
(النهاية)

$$Q'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s + h}{1} = 2s$$

$$Q'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s + h}{1} = 2s$$

مثال: إذا كان $Q(s) = s^2$ أوجد $Q'(s)$ بواسطة التعريف

هنا نستخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة هكذا:



$$\frac{ق(س) - ق(هـ + ١) - ق(س)}{هـ} = نها$$

$$\frac{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)}{هـ} = نها$$

$$\frac{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)}{هـ} = نها$$

وبانطاق البسيط (كما مرفق موضوع النهايات)

$$\frac{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)}{هـ} \times \frac{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)}{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)} = نها$$

$$\frac{٩ - هـ + ٩}{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)} = نها$$

$$\frac{١}{ق(٩) - ق(هـ + ٩) - ق(٩)} = نها$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٩} =$$

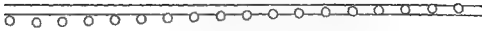
قواعد الاشتقاق (٢١-٣) Differentiation Rules

إن عملية إيجاد المشتقة الأولى للاقتارات الحقيقية باستخدام التعريف أو من المبادئ الأولية تحتاج إلى وقت طويل وجهد عسير لذا فإننا سنلجأ إلى قواعد الاشتقاق لنوفر الوقت والجهد.

سنورد هذه القواعد بلا براهين وإنما نوضحها بالأمثلة العددية والتفسير اللغوي السليم كما يلي:

قاعدة ١ إذا كان ق(س) = ج، ج، ح

فإن ق'(س) = صفر



والتفسير اللغوي للقاعدة: مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفر

كمثال: إذا كان ق (س) = ٧ ← ق (س) = صفر

ق (س) = - ١ ← ق (س) = صفر

ق (س) = π ← ق (س) = صفر وهكذا

قاعدة ٢ إذا كان ق (س) = س^٢ ، حيث س ≠ صفر، ق (س) = ٢س

فإن ق (س) = س^٢ - ١

وهذا هو القانون العام لتفاضل أو اشتقاق الاقترانات الجبرية.

كمثال: إذا كان ق (س) = س^٢ ← فإن ق (س) = ٢س ، ق (س) = ٢س

وإذا كان ق (س) = س^٢ - ١ ← فإن ق (س) = ٢س - ١ ، ق (س) = ٢س

وإذا كان ق (س) = س^{١/٢} ← فإن ق (س) = $\frac{1}{2} س^{-1/2}$ ، ق (س) = $\frac{1}{2} س^{-1/2}$

$\frac{1}{4} س^{-3/4}$ ، ق (س) = $\frac{1}{4} س^{-3/4}$

وإذا كان ق (س) = $\frac{1}{س}$ نسطه هكذا ق (س) = - س^{-١}

فإن ق (س) = - س^{-١} = $\frac{0}{س}$ لرفع س^٠ من المقام إلى البسط تصبح

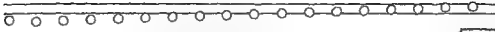
س^{-١} ثم ننزل س^{-١} إلى المقام لتصبح $\frac{0}{س}$

وإذا كان ق (س) = $\sqrt[٢]{س}$ = $\frac{1}{2} س^{-1/2}$ حيث يتغير الجذر إلى أسس نسبية

حيث الدليل ٢ يصبح مقام للأسس النسبي $(\frac{1}{2})$

فإن ق (س) = $\frac{1}{2} س^{-1/2}$ = $\frac{1}{2} س^{-1/2}$ إعادة الجذر كما في

السؤال.



قاعدة ٢ إذا كان ق (س) = ج. ل (س) فإن ق (س) = ج. ل (س)

والتفسير اللغوي للقاعدة: مشتقة حاصل ضرب عدد حقيقي \times اقتران = حاصل ضرب العدد الحقيقي \times مشتقة الاقتران.

كمثال: إذا كان ق (س) = ٥ س^١ فإن ق (س) = ٥ = ٤ \times س^٢ = ٢٠ س^٢

وإذا كان ق (س) = ٥ س^١ فإن ق (س) = ٥ = ١ \times س^١ = ٥

وكان س^١ تطير عند الاشتقاق ويبقى المعامل فقط

وكذلك

(٦س) = ٦ ثم (٧س) = ٧ وهكذا

وبشكل عام فإن (أس) = أ بعد أن تطيرس إلى حيث لا عودة إلا عند التكامل كما سيرد في وقته.

والتفسير اللغوي للقاعدة:

مشتقة عدد ثابت \times س = العدد الثابت فقط

وبشكل أوضح (عدد حقيقي \times س) = المعامل وهو العدد الحقيقي

فإذا كان ق (س) = س = ١س فإن ق (س) = ١ فقط.

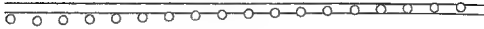
قاعدة ٤ مشتقة مجموع اقترانين أو فرقهما

إذا كان ق (س) = ل (س) \pm م (س)

فإن ق (س) = ل (س) \pm م (س)

والآن يمكن التعميم:

إذا كانت الاقترانات ق (س)، ق (م)، ق (ن)، ...، ق (س) قابلة



الاشتقاق عند النقطة س، أو بشكل عام عند س فإن:

$$\{ (ق) (س) + ق_1(س) + ق_2(س) + \dots + ق_n(س) \} = ق_1(س) + ق_2(س) + \dots + ق_n(س) + ق(س)$$

والتفسير اللغوي:

مشتقة المجموع أو الفرق = مجموع المشتقات أو فرقها على التوالي.

واعتماداً على هذه القاعدة بالذات نستطيع إيجاد ق(س) لكثيرات الحدود

كما يلي:

$$\text{كمثال: إذا كان } ق(س) = س^2 + س^2 + س + 1$$

$$\text{فإن } ق'(س) = 3س^2 + 2س + 1$$

$$\text{وإذا كان } ق(س) = 5س^2 + 7س$$

$$\text{فإن } ق'(س) = 10س + 7$$

وهكذا

قاعدة ٥ مشتقة حاصل ضرب اقترانين:

$$\text{إذا كان } ق(س) = ل(س) \cdot م(س) \text{ فإن:}$$

$$ق'(س) = ل'(س) \cdot م(س) + ل(س) \cdot م'(س)$$

والتفسير اللغوي للقاعدة:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$$\text{كمثال: إذا كان } ق(س) = (س^2 + 1)(3س - 2) \text{ أوجد } ق'(س), ق''(س)$$

$$ق'(س) = (2س + 0)(3س - 2) + (س^2 + 1)(3 - 0)$$

$$\frac{\text{سالب الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}} =$$

$$\text{كمثال: إذا كان } q(س) = \frac{٢}{س} \text{ أوجد } q'(س)$$

$$q'(س) = \frac{\text{سالب الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}} = \frac{-٢ \times ١}{س^٢}$$

$$= \frac{-٢}{س^٢} = \frac{-٢}{س^٢} = \frac{-٢ \times ٢}{س^٢} =$$

وهذه النتيجة لا يفضل الاعتماد عليها بل يجب استخدام القانون لخارج
قسمة اقترانين وهذا أفضل من حفظ النتائج العديدة.

قاعدة ٧ مشتقة اقتران القيمة المطلقة

$$\text{ليكن } q(س) = |س| \text{ أوجد } q'(س)$$

يُفضل إعادة تعريفه هكذا:

$$q(س) = \begin{cases} -س , س > \text{صفر} \\ س , س \leq \text{صفر} \end{cases}$$

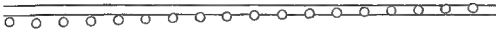
وباستخدام القاعدة $q(س) = س$ للطرفين:

$$q'(س) = \begin{cases} -١ , س > \text{صفر} \\ \text{غير موجودة} , س = \text{صفر} \\ ١ , س < \text{صفر} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{لأن المشتقة من اليمين} \\ \neq \text{المشتقة من اليسار} \end{array} \right.$$

أي أن $q'(٠)$ غير موجودة

$$\text{لأن } q'(٠) \neq q'_{-}(٠)$$

مع ملاحظة أن $q(س)$ متصل عند $س = \text{صفر}$ وهذا يؤكد القاعدة القائلة
ليس كل الاقترانات المتصلة قابلة للاشتقاق وبدوره يؤكد عدم وجود $q'(س)$ عند



الزوايا والرؤوس المدببة.

كمثال: إذا كان $ق(س) = |س^2 - ١|$ أوجد $ق(س)$ ، $ق(-١)$ ، $ق(١)$ ، $ق(٥)$ ، $ق(-٥)$

بعد إعادة تعريفه كما مر في موضوع الاقترانات فإن:

علماً بأن جذريه $س^2 - ١ = صفر$ ، $(س + ١)(س - ١) = صفر$ ، $س = ١$ ، $س = -١$

$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} س^2 - ١ ، س > ١ \\ س^2 - ١ ، س \geq ١ \\ س^2 - ١ ، س \leq ١ \end{array} \right\}$$



$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} س^2 ، س > ١ \\ غير موجودة ، س = ١ \\ س^2 - ١ ، س > ١ \\ غير موجودة ، س = ١ \\ س^2 ، س < ١ \end{array} \right\}$$

ومنها $ق(س)$ غير موجودة عند صفريه ١ ، -١

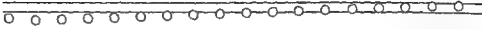
$$ق(٥) = ٢٠ = ١٥ - ١ \text{ لأن } ١٥ < ١$$

$$ق(-٥) = ٢٠ = ١٥ - ١ \text{ لأن } ١٥ < -١$$

وهكذا

ملحوظة:

إذا كان مميز الاقتران $ق(س) = |أ س^٢ + ب س + ج|$ موجباً فإنه لا يوجد له مشتقة عند أصفاره كما في المثال السابق وإذا لم يكن من السهل تحليل الاقتران $أ س^٢ + ب س + ج$ لمعرفة أصفاره فإننا نعوض القيمة المطلوب عندها إيجاد $ق(س)$



مباشرة في الاقتران دون قيمته المطلقة فإذا كان الجواب:

موجباً نأخذ القاعدة الموجبة في الاشتقاق

وإذا كان سالباً نأخذ القاعدة السالبة في الاشتقاق

كما في المثال:

$$\text{ليكن ق (س)} = |س^2 + س - 5| \text{ أوجد ق (1) ، ق (2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق (س)} = س^2 + س - 5 \text{ ، المشتقة الموجبة حيث (س}^2 + س - 5) \\ \text{ق (س)} = -س^2 - س + 5 \text{ ، المشتقة السالبة حيث (-س}^2 - س + 5) \end{array} \right\}$$

$$\text{لإيجاد ق (1) نعوض ق (1) = (1)^2 + 1 - 5 = 0 - 5 = -5 \text{ نعوضها في المشتقة}$$

السالبة

$$\therefore \text{ق (1)} = -5 - 1 = -6$$

$$\text{لإيجاد ق (2) نعوض ق (2) في الاقتران، ق (2) = (2)^2 + 2 - 5 = 4 + 2 - 5 = 1$$

$$\text{لذلك ق (2) = (2) = 1 \text{ نعوضها في المشتقة الموجبة.}$$

قاعدة ٨ مشتقة صحيح

مشتقة صحيح س أي مشتقة ق (س) = [س]

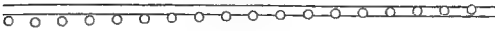
تستطيع إيجاد ق(س) بلا إعادة التعريف ودون الرسم البياني للاقتران

هكذا.

$$\left. \begin{array}{l} \text{صفر ، لكل س، ص عدد غير صحيح} \\ \text{غير موجودة ، لكل س، ص عدد صحيح} \end{array} \right\} \text{إذا كان ق (س) = [س] فإن ق (س) = 0}$$

$$\text{مثال: ليكن ق (س) = [س] أوجد ق (2) ، ق (3)}$$





ق (2) = [2] وهذا عدد صحيح ← فإن ق(2) غير موجودة

ق (- 7) = [- 7] وهذا عدد غير صحيح ← فإن ق(- 7) = 0

ملحوظة:

إذا كان الاقتران المطلوب اشتقاقه يتكون من أكثر من اقتران، كحاصل ضرب اقترانين أو خارج قسمة اقترانين فإننا لا نطبق ما سبق اشتقاقه بل نعيد التعريف هكذا

مثال: ليكن ق (س) = 2س. [س + 1]، أو ق (1/س)، ق (2)

$$\left. \begin{array}{l} 1 > س \geq 0, \\ 2 > س \geq 1, \\ 3 > س \geq 2, \end{array} \right\} = [س + 1]$$

ياخذ الفترة [0, 3]

$$\left. \begin{array}{l} 1 > س \geq 0, \\ 2 > س \geq 1, \\ 3 > س \geq 2, \end{array} \right\} = [س + 1]$$

ومنه 2س. [س + 1] = 2س + 2س

$$\left. \begin{array}{l} \text{غير موجودة} ، س = \text{صفر} \\ 1 > س > 0, \\ \text{غير موجودة} ، س = 1 \\ 2 > س > 1, \\ \text{غير موجودة} ، س = 2 \\ 3 > س > 2, \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

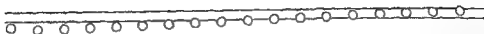
ومنها ق (1/س) = 0

ق (2) = غير موجودة

مشتقة الجذر التربيعي

قاعدة 9

مشتقة الجذر التربيعي فقط دون غيرها من الجذور كحالة خاصة الآن



واشتقاق بقية الجذور سيأتي فيما بعد:

$$\text{إذا كان ق (س) = } \sqrt{s} \text{ هـ (س) ، هـ (س) < صفر}$$

$$\text{فإن ق' (س) = } \frac{\text{هـ (س)}}{\sqrt{s}} = \frac{\text{هـ (س)}}{2\sqrt{s}} \text{ ، هـ (س) < صفر}$$

التفسير اللغوي للقاعدة:

$$\text{مشتقة الجذر التربيعي} = \frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{مشتقة الجذر نفسه}}$$

$$\text{مثال: إذا كان ق (س) = } \sqrt{1-s^2} \text{ س ح- [1 ، 1]}$$

$$\text{ق' (س) = } \frac{s^2}{1-s^2} = \frac{s^2}{1-s^2} \text{ نفس للمجال}$$

$$\text{ومنه ق (3) = } \frac{3}{1-9} = \frac{3}{8} \text{ وهكذا}$$

مع ملاحظة أن المشتقة غير موجودة في الفترة $[-1, 1]$ لأن الفترة ليست في مجاله حتى ولو كانت الأطراف $-1, 1$ موجودتان في المجال فإن ق' (-1) ، ق' (1) غير موجودتان كونهما عند الأطراف.

قاعدة ١٠ المشتقات العليا Higher Derivatives

بما أن ق' (س) اقتران ← إذن يمكن اشتقاقه كما يلي:

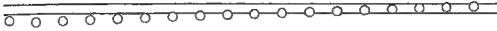
$$\text{ق' (س) = مشتقة المشتقة الأولى = المشتقة الثانية}$$

$$\text{ونرمز لها بالرموز: ق' (س) ، } \frac{d^2s}{ds^2} \text{ ، } \frac{d}{ds} \left(\frac{ds}{ds} \right) \text{ ، ص}$$

وبما أ ، ق' (س) ← إذن يمكن اشتقاقه كما يلي:

$$\text{ق' (س) = ق' (س) ، ...}$$

هكذا يمكن الاستمرار بالاشتقاق للاقتérانات الناتجة حتى نصل إلى



المشتقة النونية ورمزها.

$$ص^{(n)} = \frac{د^{(n)} ص}{دس^{(n)}} = ص^{(n)}$$

ومثل هذه المشتقات تسمى المشتقات العليا وعملية الاشتقاق تسمى الاشتقاق المتعاقب.

$$\text{مثال: إذا كان } ق(س) = س^3 + س^2 + س + 1$$

$$\text{أوجد } ق'(س)، ق''(س)، ق'''(س)$$

$$ق'(س) = س^2 + س + 1$$

$$ق''(س) = 2س + 1$$

$$ق'''(س) = 2$$

وقيم جميع المشتقات الأخرى هي الأصفار.

قاعدة ١١ مشتقة الاقتران المركب Derivative of composite Function

بواسطة قاعدة السلسلة By The Chain Rule

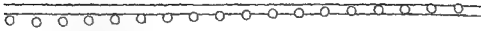
هنالك ٣ حالات لاستخدام قاعدة السلسلة هي:

أولاً: عندما لا يرتبط المتغير ص بالمتغير س ارتباطاً مباشراً، كان يكون هناك متغيراً آخر مثل ع يرتبط بين المتغيرين س، ص هكذا.

$$ص = ق(ع)، ع = ق(س) \text{ حيث } ع \text{ هو متغير وسيط يرتبط } س \text{ بـ } ص.$$

$$\text{مثال: إذا كانت } ص = ع^2 + ع، ع = ٢س^2 + ٥س$$

$$\text{أوجد } \frac{دص}{دس}$$



هنا لا ارتباط مباشر بين s ، v إنما يوجد الوسيط e لذا فإن

$$\frac{dv}{ds} = \frac{ds}{de} \times \frac{de}{ds}$$

$$(1 + e^2)^{3/2} (1 + s^2)^{3/2} =$$

وبعد أن نعيد قيمة e إلى ما تساويه بدلالة s

$$\frac{dv}{ds} = \frac{ds}{ds} = \{1 + (s^2 + 5s) + 1\} \{1 + s^2 + 5\}$$

$$(1 + s^2 + 5s) (1 + s^2 + 5) =$$

ثانياً: عند وجود القوى والجذور في الاقترانات كما يلي:

$$\frac{dv}{ds} \text{ ليكن } q(s) = v = (s^2 + 3s - 1)^2 \text{ أوجد } q'(s) \text{ أو } \frac{dv}{ds}$$

يمكن إيجاد $q'(s)$ بفك القوس $(s^2 + 3s - 1)^2$ أي ضربه بنفسه ٧

مرات مع أن الحل غير مستحيل بوجود نظرية ذات الحدين ولكنه متعب وطويل لذا

فإننا نستخدم بدلاً منه قاعدة السلسلة هكذا:

$$\text{نفرض ما بداخل القوس: } s^2 + 3s - 1 = e$$

$$\text{أي أن } e = s^2 + 3s - 1$$

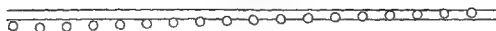
$$\text{ومنه } v = e^2$$

$$\text{ثم نستخدم قاعدة السلسلة: } \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{de} \times \frac{de}{ds}$$

$$(2e) (2s + 3) =$$

$$= 2(s^2 + 3s - 1) (2s + 3)$$

هذا ويمكن الحصول على الجواب مباشرة في حالة القوى والجذور بعد



تحويلها إلى قوى

$$\frac{دص}{دس} = مشتقة القوس \times مشتقة ما بداخله$$

$$\frac{دص}{دس} \text{ أوجد } (س^5 + س^2) = ٧$$

$$\frac{دص}{دس} = مشتقة القوس \times مشتقة ما بداخله$$

$$٧ = (س^5 + س^2) (١٠س)$$

$$\frac{1}{٥} (١ + س^٢) = \sqrt[٥]{١ + س^٢} \text{ مثال: إذا كانت ص}$$

$$\frac{دص}{دس} = مشتقة القوس \times مشتقة ما بداخله$$

$$\frac{١}{٥} (١ + س^٢) = \frac{١}{٥} (١ + س^٢) = \frac{١}{٥} (١ + س^٢)$$

$$\frac{١}{٥} (١ + س^٢) = \frac{١}{٥} (١ + س^٢)$$

ثالثاً: يمكن الاشتقاق على صورة تركيب اقترانين (كاقتران واحد مركب)

$$\text{مثال: ليكن ق (س) = س}^٢, \text{ هـ (س) = س}^٣ + ٥$$

$$\text{أوجد ق (هـ) (س), ق (هـ) (٣)}$$

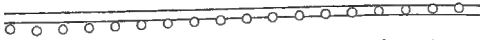
الحل:

$$\text{بما أن ق (هـ) (س) = ق (هـ) (س) \times هـ (س)}$$

$$\text{فإن ق (هـ) (س) = ق (٣) (٥ + س^٢)}$$

$$\text{ليكن ق (س) = س}^٢$$

التفاضل وتطبيقاته



$$\therefore (\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (\text{س}) = (\text{س}^3 + 5) (3) = 6 (3^3 + 5) = 18\text{س} + 30$$

$$\text{ومنها } (\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (3) = 18 (3) = 30 + 54 = 84$$

وهناك حل ثاني مباشر دون الاعتماد على $(\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (\text{س})$ هكذا

$$(\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (3) = (\text{ق}^{\sim} (\text{هـ}) (3)) \times (\text{هـ}^{\sim} (3))$$

$$= (\text{ق}^{\sim} (14)) \times (3)$$

$$= 2 (14) \times 3 = 84$$

وهناك حل ثالث هكذا:

نركب $(\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (\text{س})$ ثم نشتقه كما يلي:

$$(\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (\text{س}) = (\text{ق}^{\sim} (\text{هـ}) (\text{س})) = (\text{ق}^{\sim} (3) + 5) = 3 + 5 = 8$$

ومنها $(\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (\text{س}) = \text{مشتقة القوس} \times \text{مشتقة ما بداخله}$

$$= 2 (3 + 5) = 18\text{س} + 30$$

$$\text{ومنها } (\text{ق} \circ \text{هـ})^{\sim} (\text{س}) = 18 (3) = 30 + 54 = 84$$

مشتقة الاقتران الوسيط

قاعدة ١٢

والاقترانان الوسيطان يرتبطان معاً بمتغير واحد وهو المتغير q كما يلي:

$$\text{إذا كان } \text{ص} = \text{ق} (q)$$

$$\text{س} = \text{ق} (q)$$

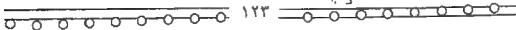
فإننا نسمي المتغير q متغيراً وسيطاً، وإيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ مباشرة يكون كالتالي:

$$\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دق}}}{\frac{\text{دق}}{\text{دس}}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

وكانه $\frac{\text{ق} (q)}{\text{هـ} (q)}$ باعتبارها حالة خاصة من قاعدة السلسلة

$$\text{إذا كان } \text{ص} = \text{ق}^2 - \text{ق} ، \text{ س} = 1 - \text{ق}^2 \text{ أوجد } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} ، \frac{\text{دص}}{\text{دق}}$$

$$\text{الحل: } \frac{\frac{\text{دص}}{\text{دق}}}{\frac{\text{دق}}{\text{دس}}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$



$$\frac{دس}{د} \div \left(\frac{1 - 2 \cdot 3}{2} \right) = \frac{دص}{دس}$$

باعتبار الاشتقاق إلى س = هـ (٢)

$$2 + \frac{(2)(1 - 2 \cdot 3) - (2)(2)}{2 \cdot 2} =$$

$$\frac{1 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{2 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \times \frac{2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

القاعدة ١٢ الاشتقاق الضمني واستخداماته Implicit Differentiation

هناك علاقات من الصعب كتابتها على الشكل ص = ق(س) بأي شكل من الأشكال ومثالها: ص^٢ + س^٢ = ص^٢ مثل هذه العلاقة تسمى علاقة ضمنية واشتقاقها الذي نلجأ إليه يسمى اشتقاق ضمني، لذا فالاشتقاق الضمني يُستخدم عندما يصعب الفصل بين المتغيرين س، ص لارتباطهما بعلاقة متينة ومعقدة، ولإيجاد $\frac{دص}{دس}$ من علاقة ضمنية نشق كل حد بالنسبة إلى نفسه ثم بالنسبة إلى س وبمدها نجدها هكذا:

$$\frac{د}{دس} (ص^2) = 2 \cdot ص \cdot \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{د}{دس} (0) = صفر = \frac{دص}{دس} \cdot صفر$$

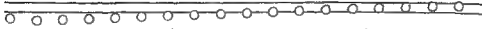
$$\frac{د}{دس} (ص^2) = \frac{1}{ص^2} \times \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{دص}{دس} \text{ أمثال: إذا كان } ص^2 + س^2 = ١6 \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

الحل:

$$\frac{د}{دس} (ص^2 + س^2) = \frac{د}{دس} (١6) \Rightarrow 2 \cdot ص \cdot \frac{دص}{دس} + 2 \cdot س \cdot \frac{دس}{دس} = 0$$

التفاضل وتطبيقاته



$$٢س + (س \times \frac{دص}{دس}) + (ص \times ١) + ٢ص = \frac{دص}{دس} = \text{صفر}$$

$$س \cdot \frac{دص}{دس} + ٢ص = \frac{دص}{دس} - ٢ص - ص$$

$$\frac{دص}{دس} (س + ٢) = -٢ص - ص$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-٢ص - ص}{س + ٢}$$

$$\text{كمثال: إذا كان } س^٢ + ص^٢ = ٥ \text{ أوجد } \frac{دص}{دس} \Big|_{(٢, ١)}$$

$$٢س + ٢ص \cdot \frac{دص}{دس} = \text{صفر}$$

$$٢ص \cdot \frac{دص}{دس} = -٢ص \cdot \frac{دص}{دس} \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-٢ص}{ص} \leftarrow \frac{دص}{دس} \Big|_{(٢, ١)}$$

$$\frac{١}{٢} =$$

ومن أشهر تطبيقات الاشتقاق الضمني هو استخدامه في التخلص من الأمس

النسبية والجذور بأي دليل كانت هكذا:

$$\text{كمثال: إذا كان } ص \approx س^{\frac{٢}{٣}} \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

$$\text{نتخلص من الأسس } \frac{٢}{٣} \text{ بأن نربع الطرفين للقوة } \frac{٢}{٣} \text{ كما يلي:}$$

$$(ص = س^{\frac{٢}{٣}})$$

$$\text{أي أن } ص^٢ = س^٢ \text{ ومنها:}$$

$$٢ص^٢ = \frac{دص}{دس} \cdot ٢ص$$

$$\text{ومنها } \frac{دص}{دس} = \frac{٢ص}{٢ص^٢} = \frac{١}{ص} \text{ ويمكن أن نكمل الحل}$$

$$\frac{\frac{2}{3} \sin^3 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} =$$

مثال: إذا كان $\sqrt{x^2 + 1} = \sin x$ أوجد $\frac{dx}{ds}$

$$(\sin x = \sqrt{x^2 + 1})^2$$

$$\sin^2 x = x^2 + 1$$

$$2 \sin x \cos x = 2x$$

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{\sin^2 x} \quad \text{ويمكن أن نكمل الحل} \quad \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{dx}{ds}$$

قاعدة ١٤

مشتقات الاقترانات الدائرية Derivatives of trigonometric Functions

وهناك حالات ثلاث لهذا الاشتقاق ترد كما يلي وعلى التوالي

الحالة الأولى: سنورد فيما يلي مشتقة كل من الاقترانين $Q(s) = \sin s$ ،

$Q(s) = \cos s$ جتاس بلا برهان ثم سنجد مشتقة بقية الاقترانات الدائرية $Q(s) = \tan s$ ،

$Q(s) = \cot s$ ، $Q(s) = \sec s$ ، $Q(s) = \csc s$ فتنس معتمدين على مشتقة كل من

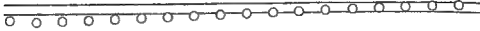
جتاس، جتاس هكذا

إذا كان $Q(s) = \sin s$ ← فإن $Q'(s) = \cos s$

وإذا كان $Q(s) = \cos s$ ← فإن $Q'(s) = -\sin s$

أي أن مشتقة الزوج المرتب (جتاس، جتاس) = $(-\sin s, \cos s)$

وبالرموز (جتاس، جتاس)' = $(-\sin s, \cos s)$



ولإيجاد (ظاس) نقول:

$$\frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جتاس} - (\text{جاس})}{\text{جتاس}} = \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \right)' = (\text{ظاس})'$$

مشتقة خارج قسمة اقترانين

$$\frac{1}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جتاس}^2 + \text{جاس}}{\text{جتاس}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\text{جتاس}} \right)' = \text{قاس}$$

أي أن (ظاس)' = قاس

وبنفس الطريقة أو بطريقة مشابهة لها نحصل على الجدول التالي الذي يضم

الاقترانات الدائرية ومشتقاتها.

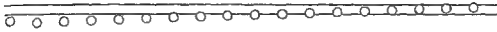
هكذا:

مشتقة الأول	الاقتران	
جتاس - جاس	جاس جتاس	الجيب وجيب التمام
قاس - قاس	ظاس ظلتاس	الظل وظل التمام
قاس ظاس - قاس ظلتاس	قاس قاس	القاطع وقاطع التمام

نلاحظ من الجدول أن مشتقات جتاس، ظلتاس قاس سوابل أي مشتقة

الاقتران الذي يحوي التمام (الحرف ت) في اسمه يكون سالب.

مثال: إذا كان ق(س) = جاس + جتاس أوجد ق' ($\frac{\pi}{4}$)



ق(س) = جتا س - جاس

$$\text{ق}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{جتا } \frac{\pi}{2} - \text{جا } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{صفر}$$

الحالة الثانية: سنورد فيما يلي مشتقة كل من الاقترانات الدائرية والتي

على الشكل: ق(س) = جا أس، حيث أ ∈ ح

ونطبق القانون ق(س) = مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية

$$\text{أي أن ق(س)} = (\text{جتا أس})'$$

$$= \text{أ جتا أس}$$

$$\text{كمثال: (جا ٥ س)'} = (\text{جتا ٥ س})' = ٥ \text{ جتا ٥ س}$$

وكذلك لبقية الاقترانات الدائرية وعلى نفس المنوال

$$(\text{جتا أس})' = (- \text{جا أس})' = - \text{أ جا أس}$$

$$(\text{ظا أس})' = (\text{قا أس})' = \text{أ قا أس}$$

$$(\text{ظا أس})' = (- \text{قتا أس})' = - \text{أ قتا أس}$$

$$(\text{قا أس})' = (\text{أ أس ظا أس})' = \text{أ قا أس ظا أس}$$

$$(\text{قتا أس})' = (- \text{قتا أس ظا أس})' = - \text{أ قتا أس ظا أس}$$

الحالة الثالثة: سنورد فيما يلي مشتقة كل من الاقترانات الدائرية والتي

على الشكل: ق(س) = جا^ق أس، حيث ق ∈ ح، أ ∈ ح

ونطبق القانون ق(س) = مشتقة القوس × مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية

$$\text{حيث ق(س)} = \text{جا}^{\text{ق}} \text{أس} = (\text{جا أس})^{\text{ق}}$$

أي أن ق(س) = (جاء^١ أ س) (جتا أ س) (١) = جاء^١ - أ س جتا أ س

مثال: إذا كان ق(س) = جاء^٢ س أوجد ق(س)

ق(س) = مشتقة القوس * مشتقة الاقتران * مشتقة الزاوية {أوقاعدة السلسلة}

$$= (٣ جاء^٢ س) (جتا س) (٥)$$

$$= ١٥ جاء^٢ س جتا س$$

وبشكل عام نطبق هذا القانون على جميع الاقترانات الدائرية

مثال: إذا كان ص = جتا^٢ س - جاء^٢ س أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\frac{دص}{دس} = \text{مشتقة القوس} * \text{مشتقة الاقتران} * \text{مشتقة الزاوية لكل من}$$

الاقترانين جتا^٢ س، جاء^٢ س

$$= (٢جتاس) (- جاس) (١) - (٢جاس) (جتاس) (١)$$

$$= - ٢جتاس جاس - ٢جتاس جاس = - ٤ جاس جتاس$$

يمكن حل هذا السؤال بطريقة أخرى وهي:

$$\text{بما أن جتا}^٢\text{س} - \text{جاء}^٢\text{س} = \text{جتا}^٢\text{س} \text{ لأن جتا}^٢\text{س} = ١ - \text{جاء}^٢\text{س}$$

متطابقة مشهورة

$$\therefore \text{ص} = \text{جتا}^٢\text{س}$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \text{مشتقة الاقتران} * \text{مشتقة الزاوية}$$

$$= - ٢جتاس * ٢ = - ٤جتاس \text{ لكن جاء}^٢\text{س} = ٢جتاس \text{ جتاس}$$

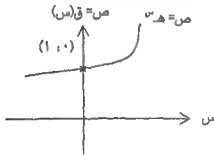
$$= - ٢ * ٢جتاس = - ٤جتاس \text{ جتاس (الجواب نفسه)}$$

مشتقة الاقتران الأس الطبيعي ق (س) = هـ س

ونذكر قبل الاشتقاق بأن ق (س) = هـ س ، اقتران أسي طبيعي أساسه هـ =

٢.٧٢ ويسمى هـ العدد النايبييري نسبة إلى العالم نايبير الذي أول من أوجده ورسم

منحناه كما في الشكل



ويمر منحناه بالنقطة (١ ، ٠) دائماً

والآن هناك حالتان للاشتقاق هما:

الحالة الخاصة: إذا كان ق (س) = هـ س

فإن ق (س) = هـ س

أي مشتقة الاقتران الأس الطبيعي هـ س هي نفسه هـ س

وبالرموز إذا كان ق(س) = هـ س ← فإن ق(س) = هـ س

الحالة العامة: إذا كان ق (س) = هـ ل(س)

فإن ق (س) = هـ ل(س) × ل'(س)

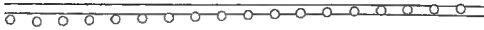
والتفسير مشتقة الاقتران الأس الطبيعي ق(س) = هـ ل(س) هي هـ ل(س) ×

مشتقة أسه

كـ مثال: إذا كان ق(س) = هـ س فإن ق (س) = هـ س × مشتقة أسه

∴ ق (س) = (هـ س) (٢س) = ٢س . هـ س

كـ مثال: إذا كان ص = س٢ - ٣س - ١ أوجد $\frac{دص}{دس}$ |



$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٢\text{س} - ٣\text{هـ} - ٣ - \text{صفر}$$

$$\frac{د\text{ص}}{د\text{س}} = ٢(٠) - ٣\text{هـ} - \text{صفر} - ٣ = -٣$$

قاعدة ١٦

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق (س) = لو س

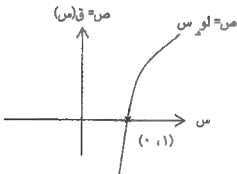
نذكر قبل الاشتقاق:

أن ق (س) = لو س اقتران لوغاريتمي طبيعي أساسه هـ = ٢,٧٢ ويسمى هـ

العدد النايبييري نسبة إلى العالم نايبير من أوجده ورسم منحناه كما في الشكل

ويمر منحناه بالنقطة (١، ٠) دائماً

والآن هناك حالتان للاشتقاق هما:



الحالة الخاصة: إذا كان ص = لو س ← فإن ق(س) = $\frac{1}{س}$ ، س < صفر

أي أن مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = لو س هي مقلوب س = $\frac{1}{س}$

بمثال: إذا كان ق(س) = لو س ← فإن ق(س) = $\frac{1}{س}$

الحالة العامة:

إذا كان ق(س) = لو ل (س) ← فإن ق(س) = $\frac{\text{مشتقة الاقتران ل(س)}}{\text{الاقتران ل(س) نفسه}}$

بمثال: إذا كان ق(س) = لو س² ← فإن ق(س) = $\frac{٢(س)}{س²} = \frac{٢}{س}$

ويمكن حل المثال عودة إلى الحالة الخاصة كما يلي:

$$ق(س) = لورس^2 = 2 لورس = 2 \times \frac{1}{س} = \frac{2}{س}$$

كمثال: أوجد ق (س) لكل من الافتراضات التالية:

$$(1) ق(س) = لورس^2 + 1$$

$$\text{الجواب: ق (س)} = \frac{(س^2 + 1)}{س^2} = \frac{1}{س^2} + \frac{1}{س^2}$$

فيصبح البسط مشتقة المقام

$$(2) ق(س) = لورس^2$$

$$\text{الجواب: ق (س)} = \frac{(س^2)}{س^2} = \frac{1}{س^2}$$

(كون (س) = 1)

$$\frac{1}{س^2} = \frac{1}{س} \times \frac{1}{س} =$$

$$(3) ق(س) = س لورس (مشتقة حاصل ضرب افتترانين)$$

$$ق(س) = \text{الأول} \times \text{مشتقة الثاني} + \text{الثاني} \times \text{مشتقة الأول}$$

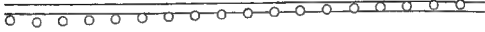
$$\therefore ق(س) = س \times (لورس) + لورس \times (س)$$

$$= س \times \frac{1}{س} + لورس \times 1 =$$

$$1 + لورس$$

$$(4) ق(س) = لورجتاس$$

$$ق(س) = \frac{(جتاس)}{جتاس} = \frac{جتاس}{جتاس} = 1$$



$$(5) \text{ ق (س) = هـ ظاس}$$

$$\text{ق (س) = هـ ظاس} \times \text{ظاس (ظاس)}$$

$$\text{هـ ظاس} \times \text{قا س} =$$

$$\text{قا س . هـ ظاس} = \{\text{أو باستخدام قاعدة السلسلة}\}$$

$$\text{هكذا: ص = هـ ظاس}$$

$$\text{نفرض أن ع = ظاس}$$

$$\therefore \text{ص = هـ ع}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \text{هـ ع} \times \text{قا س}$$

$$\text{هـ ظاس} \times \text{قا س} = \text{قا س . هـ ظاس} \text{ الجواب نفسه}$$

$$(6) \text{ ص = هـ س}$$

الحل:

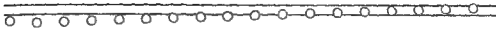
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\text{أي أن لو ص = لو هـ س} \text{ ثم بالاشتقاق الضمني}$$

$$\frac{1}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{س} \times \text{صفر} + \text{لو هـ} \times 1 = \text{لو هـ}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{لو هـ}}{1} = \text{ص لو هـ} \text{ ونعوض بدلاً من ص هكذا}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{لو هـ} = \text{لو هـ} \cdot \text{س}$$



(٢١ - ٤) تطبيقات التفاضل

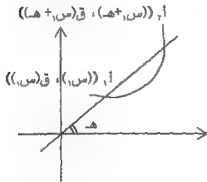
سنورد هذه التطبيقات بمضمون موجز وبأسلوب بسيط كما يلي:

أولاً: التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى:

بما أن المشتقة الأولى $Q'(S)$ لأي اقتران حقيقي $V = Q(S)$ هي نهاية متوسط تغيره - معدل تغيره Rate of Change، أي أن $Q'(S) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta S}$ للاقتران $Q(S)$.

لذا سنحاول تفسير معناها الهندسي استعانة بالهندس التحليلية الملازمة

للتفاضل كظله.



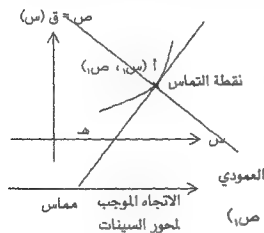
والرسم هنا للتوضيح ...

لقد مر سابقاً أن:

$$\text{متوسط التغير} = \frac{Q(S_2) - Q(S_1)}{S_2 - S_1} = \frac{\Delta V}{\Delta S}$$

وهذا يساوي ميل القاطع الواصل بين النقطتين A_1 ، A_2 كما في الشكل

أعلاه وعندما تقترب A_2 من A_1 لسبب من الأسباب وبالنهية تنطبق عليها ليصبح القاطع A_1 مماساً Tangent Line للمنحنى $Q(S)$ وكما في الشكل أيضاً، أي أن



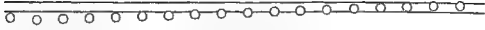
$$\text{ميل المماس} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta S} = Q'(S)$$

وبإيجاز شديد الاختصار

م المماس $Q'(S)$ حيث S_1

الأحداثي السيني للنقطة

Point of Tangency $A_1(S_1, V_1)$



ثم إن م مماس = ظاي، حيث ي هي الزاوية المحصورة بين المماس والاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\text{وعندها فإن } \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} (\text{متوسط التغير}) = \text{م مماس} = \text{ق} (س) = \text{ظاي}$$

وبناء على ذلك يمكن إيجاد معادلتى المماس والعمودي Normal Line عليه عند نقطة التماس هكذا:

معادلة المماس عند نقطة التماس $أ_1 (س_1، ص_1)$ هي

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م مماس} (\text{س} - \text{س}_1)$$

ولأن م مماس \times م العمودي = -1 من الهندسة التحليلية

$$\text{فإن م العمودي} = \frac{-1}{\text{م مماس}}$$

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م العمودي} (\text{س} - \text{س}_1)$$

مثال: أوجد م المماس و م العمودي للاقتراح $ق (س) = س^2 + س + 1$ عند النقطة $(1، 2)$

$$\text{م مماس} = \text{ق} (1) \text{ فنجد أولاً ق} (س) = س^2 + س + 1$$

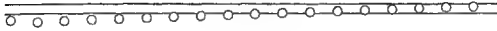
$$\text{ومن هنا م مماس} = \text{ق} (1) = 2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\text{م العمودي} = \frac{-1}{\text{م مماس}} = \frac{-1}{3}$$

مثال: أوجد قياس الزاوية التي يصنعها مماس المنحنى $ق (س) = س^2$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $س = \frac{1}{4}$

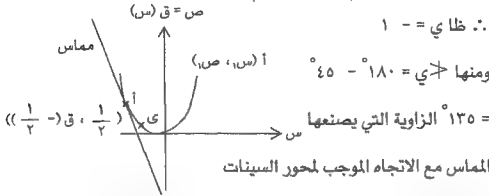
$$\text{بما أن ظاي} = \text{م مماس} = \text{ق} (س) = \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\text{ولأن ق} (س) = س^2$$



$$1 - = \left(\frac{1}{y} - \right) y = \left(\frac{1}{y} - \right) y$$

$$1 - = \text{ظاي}$$



المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

مثال: أوجد معادلتى المماس والعمودي عليه للاقتران $ق(س) = س^2 + س$

١ - عند نقطة التماس، عندما $س = ٢$

$$ص = ق(٢) = (٢)^2 + ٢ = ٤ + ٢ = ٦$$

∴ نقطة التماس (٢، ٦)

$$م_{\text{مماس}} = ق'(س)$$

$$لكن ق'(س) = ٢س + ١$$

$$ق'(٢) = ٢(٢) + ١ = ٥$$

$$\text{ومنها } م_{\text{عمودي}} = -\frac{1}{5}$$

معادلة المماس

$$ص - ص_1 = م_{\text{مماس}} (س - س_1)$$

$$ص - ٦ = ٥ (س - ٢)$$

$$ص - ٦ = ٥س - ١٠$$

$$ص = ٥س - ٤$$

$$ص = ٥س - ٤$$

معادلة العمودي

$$ص - ص_1 = م_{\text{عمودي}} (س - س_1)$$

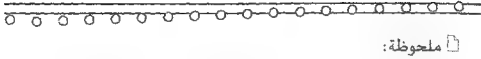
$$ص - ٦ = -\frac{1}{5} (س - ٢)$$

$$ص - ٦ = -\frac{1}{5}س + \frac{٢}{5}$$

$$ص = -\frac{1}{5}س + \frac{٣٢}{5}$$

$$ص = -\frac{1}{5}س + \frac{٣٢}{5}$$





ملحوظة:

يمكن القول أنه لا يوجد مماسات لمنحنيات بعض الاقترانات عند أي نقطة عليها كالاقترانات الخطية والقيمة المطلقة شرط أن لا تكون نقطة التماس هي صفر الاقتران أو رأس الزاوية لأن مماسات تلك الاقترانات تنطبق على منحنياتها تماماً وتظهر كأنها المنحنى نفسه.

مثال: أوجد معادلة المماس للاقتران ق(س) = $٢س - ٧$ عندما $س = ١$

$$ق'(س) = ٢ \leftarrow م_{مماس} = ٢, \quad ص_١ = ٢(١) - ٧ = -٥$$

نقطة المماس (١، -٥)

معادلة المماس:

$$ص - (-٥) = ٢(س - ١)$$

$$ص - ٥ = ٢س - ٢$$

$$ص = ٢س - ٢ + ٥$$

$$ص = ٢س - ٧ \quad \text{وهي نفسها معادلة المنحنى ق(س) = } ٢س - ٧$$

ثانياً: التطبيقات الفيزيائية للمشتقة الأولى ق'(س) والثانية ق''(س)

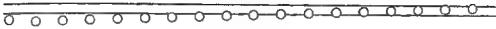
هناك استخدامات كثيرة لمفهوم المشتقة الأولى والثانية منها على سبيل

المثال:

(١) السرعة اللحظية Speed أو Instantaneous velocity

إنها السرعة التي يُشير إليها عداد السرعة في الحافلات والمركبات في أي لحظة ورياضياً هي مشتقة اقتران المسافة بالنسبة للزمن.

التفاضل وتطبيقاته



$$\text{وبالرموز اللحظية: } \frac{د}{د} = \dot{ف} = \dot{ف}$$

مثال: يتحرك جسيم حسب القاعدة $ف = ٥ + ٢ د$ حيث $ف$ المسافة بالمتر ، $د$ الزمن بالثواني أوجد سرعته بعد ٣ ثواني.

$$\text{ع اللحظية: } \dot{ف} = ٥ + ٢ د$$

$$\text{ع } \dot{ف} = ٥ + (٣) ٢ = ١١ \text{ م/ث}$$

(٢) التسارع اللحظي Acceleration

يجب أولاً التعرف على مفهوم التسارع المتوسط Average Acceleration

$$\text{وهو المتوسط} = \frac{\frac{ع}{د} - \frac{ع}{د}}{د - د} = \frac{\Delta \frac{ع}{د}}{\Delta د}$$

مثال: يتحرك جسيم حسب القاعدة $ف = ٤ + ٢ د$ احسب تسارعه المتوسط في الفترة [١ ، ٣]

$$\text{ت المتوسط} = \frac{\frac{ع}{د} - \frac{ع}{د}}{د - د} \quad \text{لكن } ع = ٣ + ٢ د + ٤$$

$$\therefore \text{ت المتوسط} = \frac{\{ ٣ + ٢(١) + ٤ \} - \{ ٣ + ٢(٣) + ٤ \}}{١ - ٣} = \frac{١١ - ١١}{٢} = ٠$$

$$= ٢٠ \text{ م/ث}^٢$$

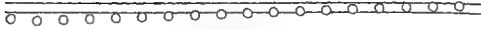
أما التسارع اللحظي فهو التغير في السرعة بالنسبة إلى الزمن رياضياً ت = المشتقة الأولى للسرعة اللحظية ع بالنسبة للزمن

$$\text{وبالرموز ت} = \dot{ع} = \frac{د}{د}$$

وبما أن السرعة ع مشتقة الزمن فإن

$$\text{ت} = \dot{ف} = \frac{د}{د} \text{ ويقاس بوحدة م/ث}^٢ \text{ أو سم/ث}^٢$$

التفاضل وتطبيقاته



كمثال: يتحرك جسيم حسب القاعدة $f = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ أوجد تسارعه

عندما سرعته تساوي ٢ م / ث.

$$ع = \dot{f} = \frac{1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \leftarrow 2 = \sqrt{2}$$

والآن نجد التسارع:

$$ت = \ddot{f} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

كمثال: يتحرك جسيم حسب العلاقة $f = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ احسب

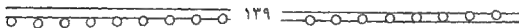
سرعته وتسارعه بعد ٢ ثواني.

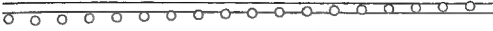
$$ع = \dot{f} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$ع = \dot{f} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$ت = \ddot{f} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$ت = \ddot{f} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$





ثالثاً: المعدلات المرتبطة بالزمن Related Rates

عندما يتحرك جسيم على خط مستقيم مدة من الزمن ويكون بعده s وحدة عند نقطة ثابتة في اللحظة t فإنه يكون اقتراناً مرتبطاً بالزمن يسمى المعدل الزمني، وإذا كان المتغيران s ، t ص كل منها اقتراناً زمنياً فإننا نسمي $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{ds}{dt}$ معدلين زمنيين وهكذا لعدة متغيرات s ، t ، u ، ... تسمى المعدلات المرتبطة بالزمن.

ولحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن يجب القيام بإجراءياً بما يلي:

- (١) أوجد علاقة أو معادلة واحدة بين المتغيرات الداخلة في المسألة في لحظة t وتحتاج لذلك بعضاً من القوانين ويمكن أن تحتاج الرسم أيضاً.
- (٢) اشتق طرفي العلاقة أو المعادلة اشتقاقاً زمنياً بالنسبة إلى الزمن فتحصل بذلك على العلاقة بين المعدلات الزمنية المرتبطة.
- (٣) عوض عن المعطى في المسألة لتحصل على المطلوب بأقصر الطرق وأسرعها كما يلي:

مثال: جسيم يتحرك في مدار دائري معادلته $s^2 + t^2 = 1$ ويمر بالنقطة $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ أثناء حركته.

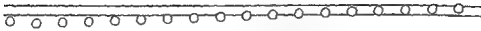
فإذا كان إحداثيه الصادي يقل بمعدل ٣ وحدات / ث.

ما معدل تغير إحداثيه السيني

بما أن العلاقة أو المعادلة موجودة وهي $s^2 + t^2 = 1$ فإننا نشتق بالنسبة

للزمن:

التفاضل وتطبيقاته



$$٢س \cdot \frac{دس}{د} + ٢ص \cdot \frac{دص}{د} = \text{صفر}$$

ونعوض النقطة:

$$٢ \left(\frac{١}{٢} \right) \frac{دس}{د} + ٢ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} \right) (٢) = \text{صفر}$$

$$\frac{دس}{د} + \sqrt{٣} = \text{صفر}$$

$$\frac{دس}{د} = -\sqrt{٣} \quad \text{وحدة / ث معدل تغير إحداثيه السيني نقصاناً.}$$

مثال: بالون كروي يتمدد بانتظام فإذا كان معدل زيادة نصف قطره

٢سم/ث احسب معدل زيادة حجمه عندما يكون نصف قطره ٥سم.



نفرض نصف قطر البالون = س سم

حجم الكرة = حجم البالون

$$ح = \frac{٤}{٣} \pi \text{ نق}^٣$$

$$\frac{دح}{د} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ \text{ نق}^٢ \cdot \frac{دنق}{د}$$

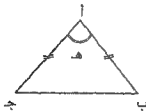
$$\frac{دح}{د} = ٤ \pi (٥)^٢ = ٤ \pi (٢٥)$$

$$= ٢٠٠ \pi \text{ سم}^٣ / \text{ث زيادة}$$

مثال: مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه المتساويين ٦ سم ،

إذا كان سرعة تغير الزاوية هـ المحصورة بين ضلعه تساوي ٢ / دقيقة جد سرعة

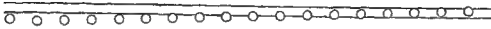
تغير مساحة المثلث عندما هـ = $\frac{\pi}{٦}$ راديان.



$$١٨٠ \leftarrow \pi \text{ راديان}$$

$$٢ \leftarrow هـ$$

التفاضل وتطبيقاته



$$\therefore \frac{د ه}{د ج} = \frac{\pi \times ٢}{١٨٠} = \frac{\pi}{٩٠} \text{ راديان معدل تغير الزاوية}$$

بما أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times \text{الضلع الأول} \times \text{الضلع الثاني} \times \text{جاه}$

حيث ه بالرادايان

$$م = \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٦ \times \text{جاه}$$

$$\therefore ١٨ = م \text{ جا ه}$$

نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{د م}{د ج} = ١٨ \text{ جتا ه} \cdot \frac{د ه}{د ج}$$

$$= ١٨ \text{ جتا } \left(\frac{\pi}{٦} \right) \times \left(\frac{\pi}{٩٠} \right)$$

$$= ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\pi}{٩٠} = \frac{\sqrt{٣}}{١٠} \pi \text{ سم}^٢ / ث$$

مثال: أ، ب سفينتان البعد بينهما ١٠٠ كم ترسو السفينة أ غرب السفينة

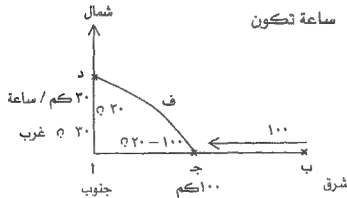
ب، بدأت أ الحركة نحو الشمال بسرعة ٣٠ كم / ساعة وبنفس اللحظة بدأت ب

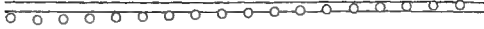
الحركة نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم / ساعة.

جد معدل تغير البعد بين السفينتين بعد مرور ساعتين.

سنحل هذه المسألة بدلالة θ فقط

بعد θ ساعة تكون





السفينة أ قطعت أ د = ٣٠ × ٩ = ٢٧٠ كم.

وتكون السفينة ب قطعت ب ج = ٢٠ × ٩ = ١٨٠ كم.

فالمثلث أ ج د تكون أضلاعه

أ ج = ١٠٠ (٩٢ -) كم

أ د = ٣٠ × ٩ كم

د ج = ف كم

والمطلوب إيجاد $\frac{د ف}{د} = ٩٩$

لكن ف^٢ = (١٠٠ - ٩٢)^٢ + (٣٠ × ٩)^٢ نظرية فيثاغورس

$$\therefore \text{ف}^2 = \frac{د ف}{د} \cdot (١٠٠ - ٩٢) + (٣٠ \times ٩)^2 = \frac{د ف}{د} \cdot ٨ + ٢٧٠^2$$

$$\therefore \text{ف} = \frac{د ف}{د} \cdot ٨ + ٢٧٠^2 = ٩٠٠ + ٩٠٤ = ٩٩٤$$

$$\text{ف} = \frac{د ف}{د} \cdot ٩٠٤ = ٢٠٠ - ٩٠٤$$

وبعد مرور ساعتين تكون د = ٢

$$\therefore \text{ف}^2 = (١٠٠ - ٩٢)^2 + (٣٠ \times ٩)^2 = ٩٩٤^2$$

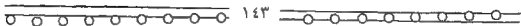
$$\text{ف}^2 = (١٠٠ - ٩٢)^2 + (٣٠ \times ٩)^2 = ٩٩٤^2$$

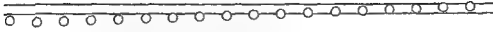
$$\text{ف}^2 = ٩٩٤^2 + ٣٦٠٠ = ٩٩٤^2 + ٩٢١٦$$

$$\text{ف}^2 = ٩٩٤^2 + ٩٢١٦ = ١٢٨١٦$$

$$\text{ف} = \sqrt{١٢٨١٦} = ١١٣$$

$$\therefore \frac{د ف}{د} = \frac{٢٠٠ - ٩٠٤}{٩٠٤} = \frac{٢٠٠ - (٢) ٩٠٤}{٩٠٤} = \frac{١٦٠٨}{٩٠٤} = \frac{١٦٠٨}{١١٣}$$





$$= 14,2 \text{ كم} / \text{ث معدل التغير بين السفينتين}$$

رابعاً: إشارة المشتقة الأولى $Q'(s)$

ترتبط $Q'(s)$ ارتباطاً وثيقاً بعملية التفاضل لأهميتها في تطبيقاته المنوعة على الاقترانات الحقيقية، إذ تعتبر مؤشراً دقيقاً لمعرفة النقط الحرجة، وتعيين الاقترانات المتزايدة والمتناقصة والثابتة وإيجاد القيم القصوى بأنواعها: ونبدأ:

■ النقطة الحرجة Critical Point

هي النقطة $(s_1, Q(s_1))$ الواقعة في مجال الاقتران $Q(s)$ والتي تكون عندها $Q'(s) = 0$ صفراً أو غير موجودة، وغالباً ما تتواجد النقط الحرجة على أطراف الاقتران المحدود ورؤوس القطوع المكافئة وأصفار اقتران القيمة المطلقة كون المشتقة الأولى $Q'(s)$ هناك غير موجودة.

$$\text{مثال: أوجد النقط الحرجة للاقتران } Q(s) = s^2 - s + 1$$

$$Q'(s) = 2s - 1 = 0 \text{ صفراً} \rightarrow s = \frac{1}{2} \text{ هناك نقطة حرجة}$$

$$\text{مثال: ليكن } Q(s) = \sqrt{s^2} \text{ معرف على الفترة } [-8, 8] \text{ عين}$$

النقط الحرجة، عندما $s = \{8, -8\}$ هناك نقطة حرجة كون المشتقة عندها غير موجودة

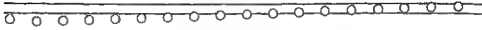
$$Q'(s) = \frac{s}{\sqrt{s}} = 0$$

$$\text{ثم } Q'(s) = \frac{s}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ صفراً عندما } s = 0$$

فإن $Q'(0)$ غير موجودة

$$\therefore \text{النقط الحرجة عندما } s = \{8, 0, -8\}$$





مجالات

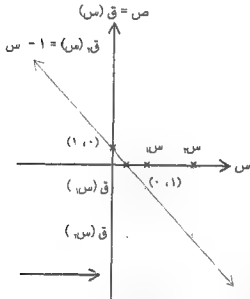
«التزايد Increasing والتناقص Decreasing»

وعلاقتها بالمشقة الأولى ق (س)

عند التمثيل البياني للاخترايين ق₁(س) = س + ١ ، ق_٢(س) = س - ١

كما يلي:

س	٠	١
ق _٢ (س)	١	٠



من الملاحظ أنه كلما ازدادت قيمة

س فإن قيمة ق_٢(س) تقل

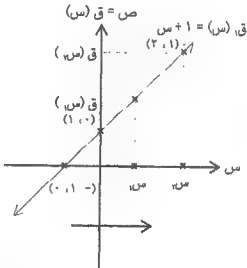
أي أن:

تزداد (س_١ < س_٢) ← فإن ق_٢(س_٢) < ق_٢(س_١) تقل معطى

أي تقل قيمة ق_٢(س) بزيادة قيمة س

فالاختراين متناقص

س	٠	١
ق _١ (س)	١	٢



من الملاحظ أنه كلما ازدادت قيمة

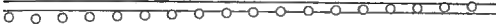
س فإن قيمة ق_١(س) تزداد

أي أن:

تزداد (س_١ < س_٢) ← فإن ق_١(س_٢) > ق_١(س_١) تزداد معطى

أي تزداد قيمة ق_١(س) بزيادة قيمة س

فالاختراين ق_١(س) = س + ١ متزايد



وبعد ان أصبح واضحاً أن $ق_1(س) = 1 + س$ متزايد

لنجد الآن مشتقة

$ق_1(س) = 1$ إشارتها موجبة / الاقتران متزايد

وأصبح واضحاً أيضاً أن $ق_2(س) = 1 - س$ متناقص

لنجد الآن مشتقة

$ق_2(س) = -1$ إشارتها سالبة / الاقتران متناقص

لذا يمكن كتابة القاعدة التالية

ليكن $ق(س)$ متصل على الفترة $[أ، ب]$ وقابلاً للاشتقاق على الفترة $(أ، ب)$

يكون $ق(س)$ متزايد في الفترة $[أ، ب]$ عندما $ق'(س) > 0$

ويكون $ق(س)$ متناقص في الفترة $[أ، ب]$ عندما $ق'(س) < 0$

إذا كان $ق'(س) = 0$ صفر فإن $ق(س)$ لا متزايد ولا متناقص بل اقتران ثابت

..... (١)

وعندما $ق'(س_1) = 0$ صفر فإن $ق(س_1)$ تسمى نقطة حرجة كما مر

سابقاً (٢)

من هذا وذاك (من ١، ٢) فإن جميع نقط الاقتران الثابت $ق(س) = 0$ نقطة

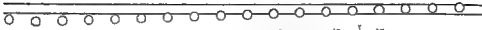
حرجة، لذا من هنا بالذات أصبح هناك ما يسمى بالفترة الحرجة وهي جزء من

اقتران ثابت وهكذا فإنه لإيجاد مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$ في

مجاله فإننا نجد أولاً $ق'(س)$ ثم نبحث في إشارتها كما في الأمثلة التالية:

مثال: إذا كان $ق(س) = س^3 - س^2$ أوجد مجالات تزايد و تناقصه

النفاضل وتطبيقاته



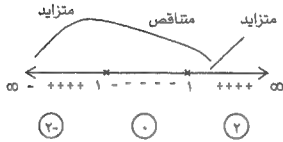
$$ق(س) = \frac{س^3 - 2س^2}{3} = \frac{س^2(س - 2)}{3}$$

$$س^2 - 2س = 0$$

$$س(س - 2) = 0$$

$$س = 0, 2 \text{ هناك نقط حرجة}$$

ثم نبحث إشارة ق(س) كما يلي



$$ق(-2) = \frac{(-2)^3 - 2(-2)^2}{3} = \frac{-8 - 8}{3} = -\frac{16}{3}$$

$$ق(0) = \frac{0^3 - 2(0)^2}{3} = 0$$

$$ق(2) = \frac{2^3 - 2(2)^2}{3} = \frac{8 - 8}{3} = 0$$

وعندما تكون ق(س) اقتران تربيعي فإنه إشارة ما بين الجذرين عكس

إشارة أ ← سالبة

وخارج الجذرين نفس إشارة أ ← موجبة كما في الشكل

لذلك ق(س) متزايد على الفترات $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ومتناقص

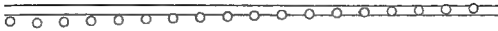
على الفترة $[0, 2]$

كمثال: ليكن ق(س) = جاس معرف على $[0, \pi/2]$ أوجد مجالات تزايد

وتناقصه

نجد النقطة الحرجة وهي عندما س = صفر عندما س = صفر، $\pi/2$ على

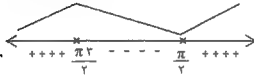




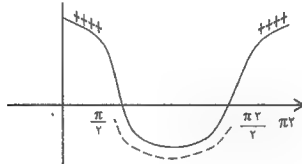
الأطراف ثم ق (س) = جتا س = صفر

$$س = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

إشارة ق (س)



كون منحنى ق (س) = جتا س بين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ هو:



∴ ق (س) = جتا س متزايد في الفترات $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

و متناقص في الفترة $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

كمثال: إذا كان ق (س) = $(3 - س)^2$ أوجد مجالات تزايد و تناقصه

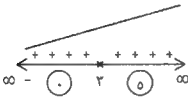
ق (س) = مشتقة القوى × مشتقة ما بداخله

ق (س) = $2(3 - س)(-1)$ = صفر

$2(3 - س) = 0$ ← صفر ← $3 - س = 0$ = صفر

س = 3 هناك نقطة حرجة

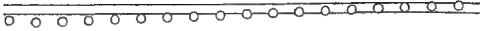
نعوض (0) في ق (س):



ق (0) = $2(3 - 0)(-1) = -6$ / موجبة متزايدة

ونعوض العدد (5) في ق (س):

ق (5) = $2(3 - 5)(-1) = 4$ / موجبة متزايدة



∴ ق (س) متزايد في الفترة $(-\infty, \infty)$

أو متزايد على ح.

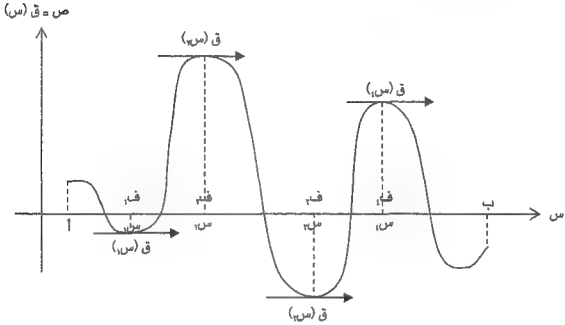
■ القيم القصوى Extreme Values

سنناقش كيفية إيجاد القيم القصوى المحلية Absolute والمطلقة Relative

باختبار المشتقة الأولى ق' (س).

بداية نستعين بالشكل المجاور لإيضاح مفهوم القيم القصوى والتمييز بين

أنواعها المحلية والمطلقة:



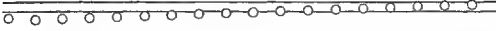
من الملاحظ أن ق (س₁) ، ق (س₂) هما أكبر القيم التي يأخذها الاقتران

ق (س) في الفترات التي تحوي س₁ ، س₂ وهما ف₁ ، ف₂

لذا فإن ق (س₁) ، ق (س₂) قيم قصوى من نوع عظمى محلية Maximum

Value لأن كلاً منهما أكبر قيمة للاقتران في الفترة التي تحتوي النقطة س₁ ، س₂

ومن الملاحظ أن ق (س₁) ، ق (س₂) هما أصغر القيم التي يأخذها الاقتران



ق (س) في الفترات التي تحوي s_1 ، s_2 وهما f_1 ، f_2

لذا فإن ق (س)، ق (س₁) قيم قصوى من نوع صغرى محلية Minimum Value لأن كلا منهما أصغر قيمة للاقتران في الفترة التي تحتوي النقطة s_1 ، s_2 فالقيم القصوى المحلية العظمى والصغرى هي ق (س₁)، ق (س₂)، ق (س₃)

ولإيجاد القيم القصوى المطلقة سواء أكانت صغرى أم عظمى فإننا نقارن بين العظمى المحلية وأكبرها بالقيمة تسمى عظمى مطلقة مثل ق (س₃) في الفترة [أ، ب] جميع المجال.

وكان القيمة العظمى المطلقة كانت محلية ثم أخذت أكبر قيمة للاقتران فأصبحت عظمى مطلقة وتقارن بين الصغرى المحلية بالقيمة تسمى صغرى مطلقة. مثل ق (س₃) في الفترة [أ، ب] جميع المجال.

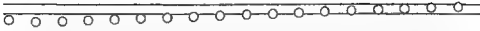
وكان القيمة الصغرى المطلقة كانت محلية ثم أخذت أصغر قيمة للاقتران فأصبحت صغرى مطلقة وبما أن المماس عند القيم القصوى يوازي محور السينات كما هو واضح من الشكل فإن النقط s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 نقط حرجة.

فالنقط الحرجة تعين قيم قصوى ولكن ليس دائماً لذا يمكن أن يقال:

ليس كل نقطة حرجة تحدد قيمة قصوى

مع ملاحظة أن القيمة عند النقطة الحرجة تغير من إشارة ق (س) لذا فالاقتران يغير من تزايديه إلى تناقصه ومن تناقصه إلى تزايديه لذا فالاقتران المتزايد على ح لا يحوي قيماً قصوى على الإطلاق وكذلك الاقتران المتناقص على ح.

لذا فالنقط الحرجة تحدد قيم قصوى عندما تغير ق (س) من إشارتها قبل



النقطة s_1 وبعدها وعندما $q(s_1) = 0$ صفر إذا كانت موجودة أو $q(s_1)$ غير موجودة.

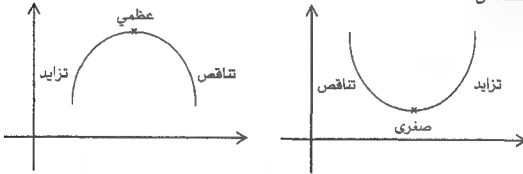
وقبل أن نبدأ بالأمثلة نود أن نناقش الملاحظتين التاليتين:

ملحوظة «١»

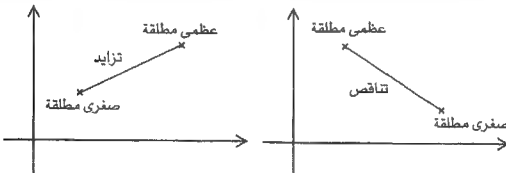
إن النقط الحرجة لا تحدد قيماً قصوى كما في الاقتران $q(s) = s^2$ ،
فإن $q(s_1) = 0$ صفر عندما $s = 0$ صفر نقطة حرجة ولكنها لا تحدد قيمة قصوى
كون الاقتران $q(s) = s^2$ متزايد في \mathbb{R}

ملحوظة «٢»

لايجاد القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة خلال مجال الاقتران يجب
أن نغير $q(s_1)$ من إشارتها قبل وبعد s_1 حتى يغير الاقتران من تزايديه إلى تناقص
والعكس.

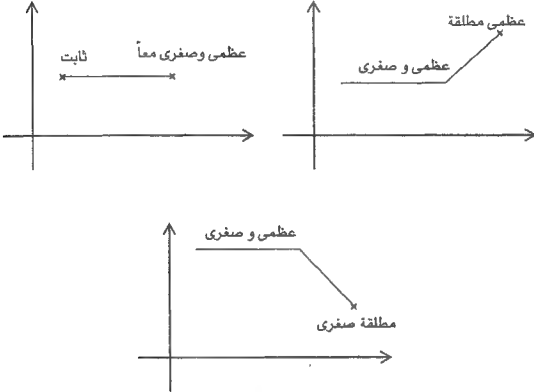


وأما عند الأطراف وكما في الرسم فإن بداية التناقص عظمى مطلقة ونهاية
التناقص صغرى مطلقة وبداية التزايد صغرى مطلقة ونهاية التزايد عظمى مطلقة
(وجميعها مطلقة كما ترى).

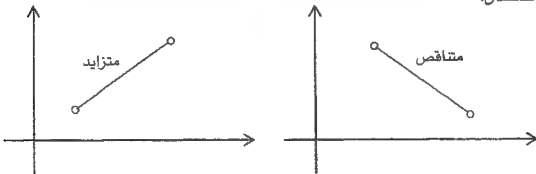




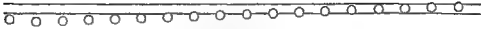
والقيم القصوى يمكن أن تكون فترات وليس نقطاً فقط كما لا يمكن التمييز بين الصغرى والعظمى كما في الأشكال.



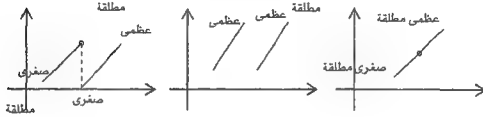
ويمكن أن تكون الأطراف لا تنتمي إلى الاقتران وعندها لا توجد للاقتران قيم عظمى وصغرى إذا كان الاقتران محدود ومعرف على فترة مفتوحة كما في الأشكال.



التفاضل وتطبيقاته

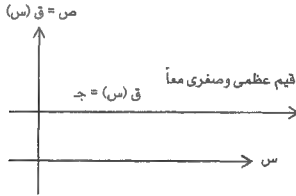


وأخيراً هناك حالات خاصة كما في الأشكال

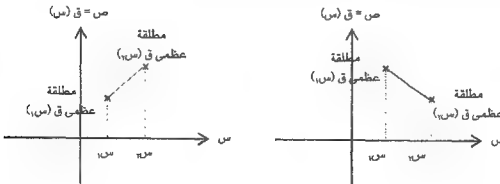


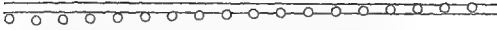
وبإيجاز شديد نقول:

أولاً: جميع نقاط الاقتران الثابت حرجة لأن $Q = S$ ، لذا فكل نقطة تحدد قيم عظمى وصغرى معاً ولا يمكن تمييزها مطلقاً كما في الشكل



ثانياً: الاقتران الخطي لا يحدد قيم قصوى إلا إذا كان محدداً فإنه يحدد قيمة صغرى عند بداية تزايد أو نهاية تناقصه وعظمى عند بداية تناقصه ونهاية تزايديه وفي الحالتين تكون مطلقة كما في الشكلين





ثالثاً: جميع الاقتترانات الأخرى نجد فيها النقطة الحرجة عندما $ق(س) = 0$ صفر خلال المجال ثم نلاحظ التغير في إشارة $ق(س)$ ثم نجد القيم القصوى ونوعها كما يلي:

مثال: جد النقطة الحرجة للاقتران $ق(س) = س^3 - ٢س^2 + ٢$ ثم اختبرها لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة في الحالتين:

بما أنه متصل كونه كثير حدود لذا فإننا نجد:

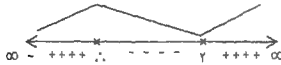
$$ق(س) = س^3 - ٢س^2 + ٢$$

$$٢س^3 - ٤س = ٠ \text{ صفر}$$

$$٢س(س - ٢) = ٠ \text{ صفر}$$

عندما $س = ٣$ { صفر، ٣ } هناك نقط حرجة يمكن أن تعين قيم قصوى بعد أن تغير $ق(س)$ من إشارتها قبل وبعد النقطة.

$$إشارة ق(س) = س^3 - ٢س^2 + ٢$$



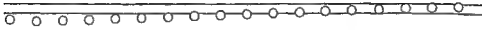
بما أن $ق(س)$ اقتران تربيعي لذا بين الجذرين إشارته عكس إشارة $أ$ وهو سالب وخارج الجذرين نفس إشارة $أ$ وهو موجب.

لذا ومن الشكل $ق$ (صفر) عظمى محلية

$ق(٢)$ صغرى محلية

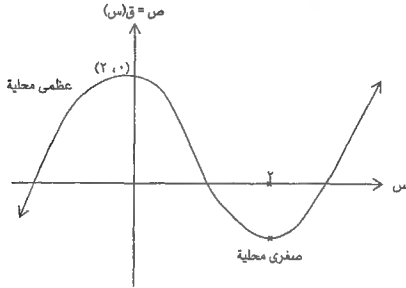
$$وهكذا فالعظمى المحلية = $ق(٠) = ٢ - ٢(٠) + ٢ = ٢$$$

التفاضل وتطبيقاته



$$\text{والصغرى المحلية} = ق(2) = 2^3 - 2^2 \times 3 + 2 = 2 - 2 = 0$$

وكلاهما ليس مطلقة كون الاقتران غير محدود من الطرفين وللتحقق من ذلك نرسم شكلاً تقريباً للاقتران كما يلي.



ولا قيم قصوى مطلقة للاقتران

$$\text{كـ مثال: إذا كان ق(س) = } \sqrt{s} \text{ جـا س في الفترة } [\pi, 0]$$

أوجد القيم القصوى أن وجدت ونوعها

الحل:

بما أن جـا س اقتران متصل في الفترة $[\pi, 0]$ كونه دائري (الجيب وجيب

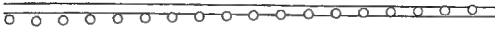
التمام) بشكل خاص

فإن ق(س) = \sqrt{s} جـا س متصل في الفترة نفسها كون جـا س في الفترة $[\pi, 0]$

موجب أي أكبر من صفر.

$$ق(س) = \frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر التربيعي}}{\text{ضعف الجذر التربيعي}} = \frac{\text{جـا س}}{2\sqrt{s} \text{ جـا س}}$$





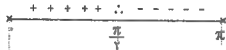
= صفر (عند النقط الحرجة التي تعين قيم قصوى)

ومنها جتا س = صفر

∴ $\frac{\pi}{4}$ س = هناك نقطة حرجة يمكن أن نعين قيم قصوى نجد إشارة

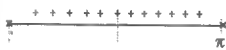
ق (س) = $\frac{\text{جتا س}}{\sqrt{2} \text{ جا س}}$ في الفترة $[\pi, 0]$ هكذا

الربع الأول موجب
الربع الثاني سالب

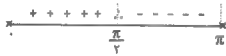


إشارة البسط جتا س

في الربع الأول موجب
والثاني أيضا



إشارة المقام $\sqrt{2} \text{ جا س}$



إشارة ق (س) بالقسمة
كأنضرب من حيث
الإشارات

ومنه ق $(\frac{\pi}{4})$ عظمى محلية

ثم ق (0) صغرى مطلقة (بداية التزايد)

ثم ق (π) صغرى مطلقة (نهاية التناقص)

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{\frac{\pi}{4} \text{ جا}} = \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ ق} = \text{العظمى المحلية}$$

$$\text{الصغرى المطلقة} \text{ ق } (0) = \sqrt{\text{جا صفر}} = \sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$$

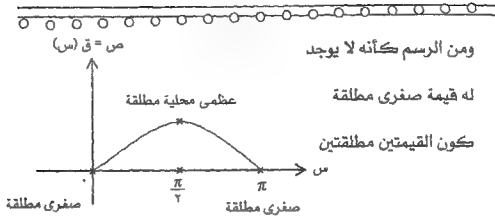
$$\text{وق } (\pi) = \sqrt{\pi \text{ جا}} = \sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$$

وق $(\frac{\pi}{4})$ العظمى المحلية حيث لها أكبر منها في مجال الاقتران فهي

عظمى مطلقة ومن هنا يمكن رسم الاقتران:

ق (س) = $\sqrt{\text{جا س}}$ في الفترة $[\pi, 0]$

التفاضل وتطبيقاته



وأفضل طريقة لتعيين القيم القصوى المطلقة هي:

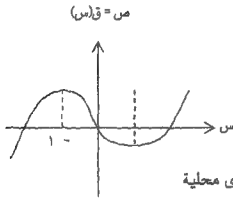
أكبر قيمة للاقتران (بعد مقارنة القيم العظمى المحلية) = القيمة العظمى المطلقة له

أصغر قيمة للاقتران (بعد مقارنة القيم الصغرى المحلية) = القيمة الصغرى المطلقة له

كما في المثال التالي وأستعانة بالأشكال التالية:

مثال: جد أكبر قيمة وأصغرها إن وجدت للاقتران $ق(س) = س^3 - س^2$

في الحالات التالية:



(١) $س \in [-1, 1]$ بعد التمثيل البياني لمنحناه

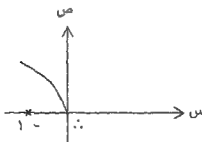
$$ق(س) = س^3 - س^2 = \text{صفر}$$

$$(س + 1)(س - 1) = \text{صفر}$$

$س = -1, 1$ نقط حرجة وتعيين قصوى محلية

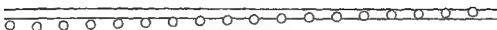
وأما الاقتران فلا يوجد له قيم قصوى مطلقة كونه غير محدود لذا لا يوجد

قيم قصوى مطلقة لا أكبر ولا أصغر.



(٢) $س \in [-1, 1]$

من الرسم



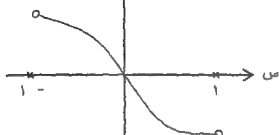
ق (١ -) عظمى مطلقة كونها بداية التناقص ومنها ق (١ -) = صفر

ق (٠) صغرى مطلقة كونها نهاية التناقص ومنها ق (٠) = صفر

ص = ق (س)

(٣) س \in (١ - ، ١)

ومن الرسم



لا يوجد قيم قصوى مطلقة

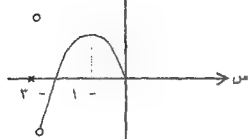
لأن ق (١)، ق (١ -) غير

معرفة كون الاقتران لا يوجد له أطراف

ص = ق (س)

(٤) س \in (٣ - ، ٠]

ومن الرسم



ق (١ -) = ٢ عظمى مطلقة فقط

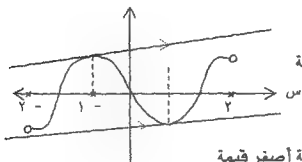
ولا يوجد له قيمة صغرى مطلقة

كونه محدود وغير معرف عند س = -٣

ص = ق (س)

(٥) س \in (٢ - ، ٢)

من الرسم



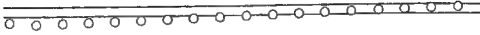
ق (١ -) = ٢ عظمى مطلقة

أكبر قيمة

ق (١) = -٢ صغرى مطلقة أصغر قيمة

كون للاقتران لا يوجد أطراف وكون

التفاضل وتطبيقاته

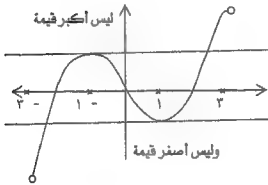


$$ق(2) = (2)^2 - 2 = 2 \quad 2 = 6 - 4 = (2) \quad 2 = 2 - 2 = 0$$

$$وكون ق(2) = (2)^2 - 2 = 2 \quad 2 = 6 - 4 = (2) \quad 2 = 2 - 2 = 0$$

ولأن عند الأطراف أكبر قيمة له أقل من 2 كونه غير معرف عند $s = 2$

وأصغر قيمة له أكبر من $2 -$ كونه غير معرف عند $s = 2 -$



(6) $s \in (-3, 3)$

ومن الرسم

ق(1) = عظمى محلية

وليست مطلقة كونها ليست

أكبر قيمة بل ق(2,5) مثلاً أكبر من ق(1)

لأن ق(2,5) = (2,5)^2 - 2(2,5) = 7,5 - 10,625 = -3,125 وهذا أكبر من

ق(1)

لذلك فإن ق(1) عظمى محلية وليست مطلقة كما هو واضح أعلاه

وكذلك ق(1) = 2 - 2 = 0 صغرى محلية وليست مطلقة

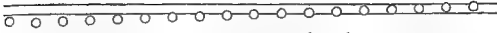
كون ق(2,5) مثلاً أصغر من ق(1)

لأن ق(2,5) = (2,5)^2 - 2(2,5) = 7,5 - 10,625 = -3,125

لذلك لا يوجد للاقتران قيم مطلقة إطلاقاً

خامساً: إشارة المشتقة الثانية ق''(s):

تعتبر إشارة ق''(s) مؤشراً لمعرفة تقعر الاقتران، ولإيجاد نقط انعطافه كما

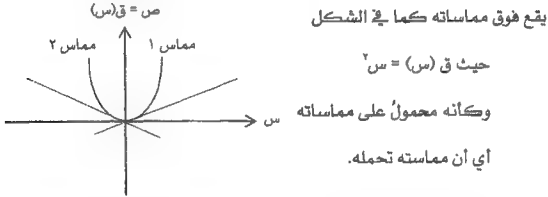


وتعتبر المشتقة الثانية اختباراً جيداً لاكتشاف القيم القصوى بأنواعها وإيجادها، ثم لا تنس استقراء الرسم ورسم المنحنيات للاقترنات وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود منها.

◆ التقرع Concavity

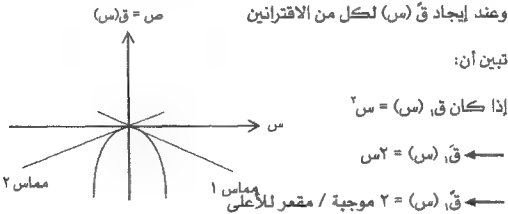
والتقرع يكون باتجاهين أو أكثر وسنقتصر على التقرع للأعلى ثم للأسفل

يُقال للاقتران Q (س) أنه مقعر للأعلى Concave Upward إذا كان منحناه



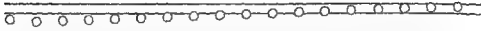
ويقال للاقتران Q (س) أنه مقعر للأسفل Concave Downward إذا كان منحناه

يقع تحت مماساته كما في الشكل حيث $Q(s) = -Q(s)$ وكانه يحمل مماساته.



إذا كان $Q_2(s) = -Q(s)$ ← $Q_2'(s) = -Q'(s)$

$Q_2'(s) = -2 = Q'(s)$ سالبة / لتقرع للأسفل



لذا يمكن التوصل إلى النظرية التالية التي تربط التقعر بإشارة $Q'(s)$ كما في هذه السطور:

ليكن $Q'(s)$ اقتران متصل على $[a, b]$ وقابل للاشتقاق في (a, b) ولتكن $Q''(s)$ ، $Q'(s)$ معرفتان على (a, b) فإنه:

إذا كانت $Q'(s)$ موجبة لجميع قيم $s \in (a, b)$ فإن منحنى $Q(s)$ مقعر للأعلى في نفس الفترة.

وإذا كانت $Q'(s)$ سالبة لجميع قيم $s \in (a, b)$ فإن منحنى $Q(s)$ مقعر للأسفل في نفس الفترة.

مثال: أوجد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران $Q(s) = s^3 - 2s^2 + 3s - 3$

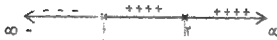
$$Q'(s) = 3s^2 - 4s + 3 = 0 \quad s = 1, 2$$

$$Q''(s) = 6s - 4 = 0 \quad s = 2/3$$

$$Q''(s) = 6s - 4 = 0 \quad s = 2/3$$

$$Q''(s) = 6s - 4 = 0 \quad s = 2/3$$

والآن نبحث في إشارة $Q''(s)$



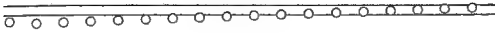
إشارة $Q''(s)$



إشارة $Q''(s)$



إشارة $Q''(s)$



ق (س) مقعر لأعلى في الفترات $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

وق (س) مقعر لأسفل في الفترة $[0, 2]$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن، ماذا يحدث لمنحنى الاقتران عندما ق (س)

= صفر، أي عند النقطة س = صفر، ٢

الجواب المفيد وبإيجاز شديد:

إذا غيرت ق (س) من إشارتها قبل س، ويعدها فإن:

(س_١، ق (س_١)) تسمى نقطة انعطاف Inflection Point وهذا يقودنا إلى

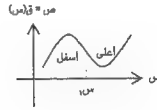
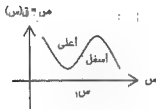
التعريف التالي:

نقطة الانعطاف:

هي النقطة (س_١، ق (س_١)) الواقعة في مجال الاقتران ق (س) القابل

للاشتقاق في مجاله والتي يتغير عندها اتجاه تقعر منحنى من الأسفل إلى

الأعلى أو من الأعلى للأسفل

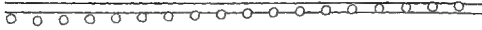


والتي عندها ق (س_١) = صفر

شرط تغير منحنى ق (س) من تقعره وهذا يجسد تغير ق (س_١) من إشارتها

لذلك: تسمى النقطة (س_١، ق (س_١)) نقطة انعطاف المنحنى الاقتران ق (س)

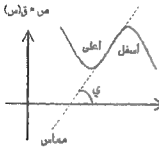
التفاضل وتطبيقاته



إذا تحققت الشروط التالية معاً.

- Q (س) متصل عند $s = s_1$
- $Q'(s_1)$ موجودة
- $Q'(s_1) = 0$ وصفر وتغير $Q'(s)$ من إشارتها قبل وبعد s_1
- $Q'(s_1) = 0$ موجودة - شرط إضافي للتحقق فقط

وفي هذه الحالة تسمى زاوية ميل المماس المرسوم للمنحنى عند نقطة الانعطاف (عن وجدت) زاوية الانعطاف Inflection Angle ويرمز لها بالرمز θ حيث



كما في الشكل

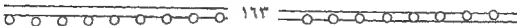
أي أن $\theta = Q'(s_1)$

حيث $(s_1, Q(s_1))$ نقطة انعطاف

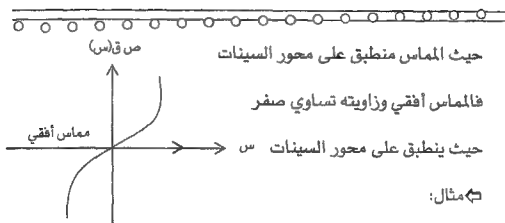
وهناك نقطة الانعطاف الأفقي Horizontal Inflection إذا تحققت الشروط

التالية معاً:

- Q (س) متصل عند $s = s_1$
 - $Q'(s_1)$ يغير من اتجاه تقعره حول s_1
 - $Q'(s_1) = 0$ وصفر
 - $Q'(s_1) = 0$ وصفر، المشتقتان متساويتان وكل منهما تساوي صفر
- وعندها يكون قياس زاوية الانعطاف θ يساوي صفر دائماً وأشهر مثال على ذلك هو $Q(s) = s^2$ كما في الشكل



التفاضل وتطبيقاته



اوجد نقطة الانعطاف وزاوية الانعطاف عند كل نقطة انعطاف لمنحنى

$$\text{الاقتران في (س) = س}^1 - \text{س}^2$$

في (س) متصل كونه كثير حدود

$$\text{في (س) = س}^2 - 12\text{س}^3$$

$$\text{في (س) = س}^2 - 24\text{س} = \text{صفر}$$

$$12\text{س} (\text{س} - 2) = \text{صفر}$$

س = صفر، 2 هناك نقط قد تصبح نقط انعطاف إذا تغيرت في (س) من

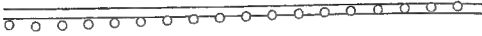
إشارتها لنبحث إشارة في (س)



أي أن ((0)) في ((0)) نقطة انعطاف

وكذلك ((2)) في ((2)) نقطة انعطاف أخرى

$$\text{ولما كانت في (0) = (0)}^1 - \text{س}^2 = \text{صفر}$$



∴ (٠، ٠) نقطة انعطاف أولى

$$ق(٢) = (٢) - ٤ - ٢(٢) = ٢٢ - ١٦ = ٦$$

∴ (٢، ١٦) نقطة انعطاف أخرى

$$ظا ي = ق'(٠) = ٤ - ٢(٠) = ١٢ = صفر$$

∴ $\nabla_y = ١$ صفر زاوية الانعطاف الأولى

ولما كانت ق'(س) = صفر وكذلك ق'(٠) = صفر فالانعطاف أفقي

$$\nabla_y = ق'(٢) = ٤ - ٢(٢) = ١٢ - ٢٢ = ٤٨ - ١٦ = ٣٢$$

∴ $\nabla_y = ١$ ظلًا ١ زاوية الانعطاف الثانية

لنعود مرة أخرى إلى القيم القصوى وكيفية إيجادها ولكن باختبار المشتقة الثانية ق''(س) والاختبار بإيجاز موضع بالنظرية التالية:

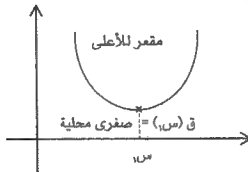
نظرية القيم القصوى المحلية باختبار المشتقة الثانية ق''(س):

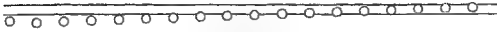
ليكن ق(س) متصل على [أ، ب] ولتكن ق'(س)، ق''(س) معرفتين على

(أ، ب) ولتكن ق'(س) = صفر، لكل س_١ ∈ (أ، ب) عندها نقول:

إذا كانت ق''(س_١) < صفر فإن للاقتران قيمة صغرى محلية عند س_١ كونه

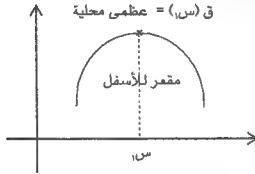
مقعر للأعلى كما في الشكل





إذا كانت $Q'(s_1) > 0$ صفر فإن للافتزان قيمة عظمى محلية عند s_1 كونه

مقعر للأسفل كما في الشكل



إذا كانت $Q'(s_1) = 0$ صفر تكون $Q'(s)$ قد فشلت في الاختبار عندها نعود

إلى اختبار المشتقة الأولى $Q'(s)$ لإيجاد القيم القصوى كما مر سابقاً.

ونعيد بنود النظرية بإيجاز شديد هكذا:

تحدد النقطة $(s_1, Q(s_1))$ قيمة صغرى محلية عندما

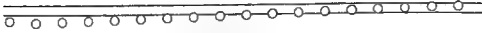
$$\text{معاً} \begin{cases} Q'(s_1) = 0 \\ Q''(s_1) < 0 \end{cases}$$

وتحدد النقطة $(s_1, Q(s_1))$ قيمة عظمى محلية عندما

$$\text{معاً} \begin{cases} Q'(s_1) = 0 \\ Q''(s_1) > 0 \end{cases}$$

لا تحدد النقطة $(s_1, Q(s_1))$ أي قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) عندما

$$\text{معاً} \begin{cases} Q'(s_1) = 0 \\ Q''(s_1) = 0 \end{cases}$$



لذا نترك اختبار $ق$ (س) ونعود إلى اختبار $ق$ (س)

كما في المثال:

أوجد باختبار $ق$ (س) القيم القصوى المحلية للاقتزان

$$ق(س) = ٣س^١ + ٤س^٢ - ١٢س^٣ + ٥$$

$$ق'(س) = ١٢س^٢ + ٨س - ٣٦ = ٠ \quad \leftarrow \quad ٢٤س - ٣٦ = ٠ \quad \leftarrow \quad ٢س - ٣ = ٠ \quad \leftarrow \quad ٢س = ٣ \quad \leftarrow \quad س = ١.٥$$

$$س(س) = ٢س - ٣ = ٠ \quad \leftarrow \quad س = ١.٥$$

$$س(س) = ٢س + ١ = ٠ \quad \leftarrow \quad س = -٠.٥$$

ومنها $س = \{-٠.٥, ١.٥, ٣\}$ هناك نقط حرجية يمكن أن تحدد قيم

قصوى

وباختبار $ق$ (س) نجد اشارتها عند كل من النقط: كما يلي

$$ق'(س) = ٣٦س^٢ - ٢٤س - ٣٦ = ٠$$

$$ق'(س) = (٢ - ٣٦) = ٢٤ - ٣٦ = -١٢ < ٠ \quad \text{موجبة}$$

$$\therefore ق'(٢ - ٣٦) = ٢٧ \text{ صفري محلي} = -٢٧ \text{ الصفري المحلي}$$

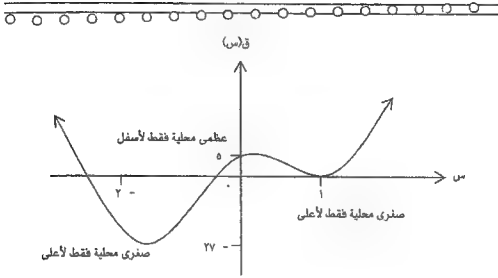
$$ق'(٠) = ٣٦(٠) + ٢٤(٠) - ٣٦ = -٣٦ < ٠ \quad \text{موجبة}$$

$$\therefore ق'(٠) = ٣٦(٠) + ٢٤(٠) - ٣٦ = -٣٦ < ٠ \quad \text{موجبة}$$

$$ق'(١) = ٣٦(١) + ٢٤(١) - ٣٦ = ٢٤ > ٠ \quad \text{موجبة}$$

$$\therefore ق'(١) = ٣٦(١) + ٢٤(١) - ٣٦ = ٢٤ > ٠ \quad \text{موجبة}$$

وبناءً على ما سبق نستطيع رسم منحنى الاقتزان $ق(س)$ التقريبي كما يلي:



والمنحنى لكثير حدود من الدرجة الرابعة كما ترى

والآن سنناقش هذا البند تحت اسم:

استقراء الرسم Graphing Induction

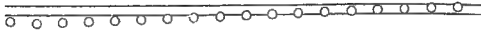
واستقراء الرسم فرع من فروع الرياضيات يبحث في منحنيات الاقترانات ومنحنيات مشتقاتها الأولى والثانية على السواء، يبحث على التفكير ويبدل على القدرة والفهم والذكاء عند تحليل المنحنيات.

كما يعتمد على التحصيل العلمي والمعرفة التامة بالنظريات والقوانين الرياضية لاستنباط خصائص تلك الاقترانات من حيث التزايد والتناقص والتعقر لإيجاد النقط الحرجة ونقط الانعطاف وأنواعه وحساب القيم القصوى العظمى والصغرى، ولكنه يتطلب بعض المعلومات الأساسية المتعلقة بإشارتي $f'(x)$ ، $f''(x)$ كما يلي مع الاستعانة بالرسم.

لذا يجب دراسة الجدول التالي لفهم العلاقة بين منحنيات $f'(x)$ ، $f''(x)$ ،

$f'(x)$

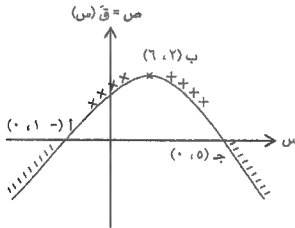
التفاضل وتطبيقاته



وإن ق (س) ↓	فإن ق (س) ↓	إذا كان ق (س) ↓
	ق (س) < صفر	متزايد
	ق (س) > صفر	متناقص
	ق (س) = صفر	ثابت
	ق (س) = صفر أو غير موجود	يحدد نقطة حرجة س _١
ق (س) < صفر	ق (س) متزايد	مقر لأعلى
ق (س) > صفر	ق (س) متناقص	مقر لأسفل
ق (س) = صفر	يحدد نقطة حرجة للافتتان ق (س)	يحدد نقطة انعطاف س _١

وسوف نستقرئ الرسم من خلال منحنيات ق (س)، ق (س)، ق (س)

وهكذا.



ليكن الرسم المجاور يمثل

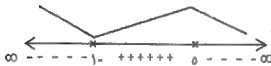
منحنى ق (س) حيث ق (س) كثير

حدود من الدرجة الثالثة اعتمد على

الشكل المجاور للإجابة على كل

من:

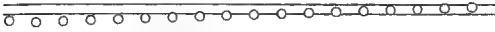
(١) أوجد فترات التزايد والتناقص:



أولاً نجد إشارة ق (س) كما يلي

ق (س) متزايد في الفترة $[-1, 0]$

التفاضل وتطبيقاته



ق (س) متناقص في الفترة $(-\infty, 1) \cup [5, \infty)$

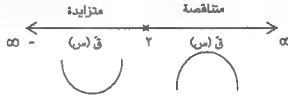
(٢) أوجد قيم س_١ الحرجة

عندما $S_1 = \{-1, 5\}$ هناك نقط حرجة

(٣) أوجد فترات التغير

تزايد ق (س) ← يعني ق (س) مقعر لأعلى كون ق (س) < صفر

تناقص ق (س) ← يعني ق (س) مقعر لأسفل كون ق (س) > صفر



ق (س) مقعر لأعلى في الفترة $(-\infty, 2)$

ق (س) مقعر لأسفل في الفترة $(2, \infty)$

(٤) أوجد نقطة الانعطاف

نقطة انعطاف الاقتران هي نقطة حرجة للمشتقة الأولى وهي النقطة التي

عندها يغير الاقتران من تقعره

∴ $(2, 0)$ نقطة انعطاف

وعند ق (٢) = صفر

(٥) أوجد ظا زاوية الانعطاف

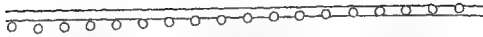
ظا ي = ق (٢) = ٦ كما هو في الشكل

∴ زاوية الانعطاف هي الزاوية التي ظا^{-١} = (٦)

(٦) أرسم ق (س)



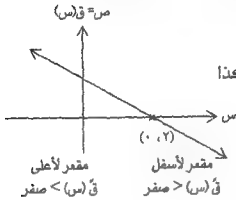
التفاضل وتطبيقاته



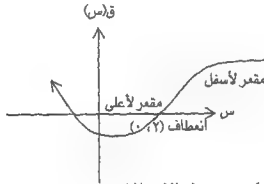
بما أن Q (س) من الدرجة الثانية فإن Q (س) من الدرجة الأولى

$Q(2) = 0$ صفر

∴ يقطع محور السينات في $(2, 0)$ هكذا



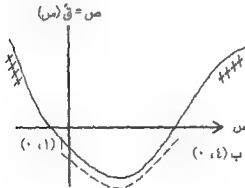
(7) أرسم Q (س) من الدرجة الثالثة



علماً بأن Q (س) يمر بنقطة الانعطاف

مثال: ليكن الرسم المجاور منحنى Q (س) حيث Q (س) كثير حدود من

الدرجة الرابعة واعتماداً على الرسم أوجد



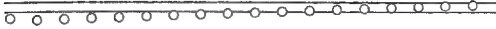
(1) فترات تقعر Q (س)

نجد إشارة Q (س)

هكذا



Q (س) مقعر لأعلى في الفترات: $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$



ق (س) مقعر لأسفل في الفترة $[٠, ٤]$

(٢) أوجد نقط الانعطاف

س_١ = $[٠, ٤]$ نقط انعطاف

لأن ق' (٠) = صفر ، ق' (٤) = صفر

(٣) أوجد فترات تقعر المنحنى ق' (س) المستقيم الأول

كون تزايد ق' (س) معناه تقعر ق (س) {أقل درجة}

كون تزايد ق' (س) معناه تقعر ق' (س) {أقل درجة}

∴ ق' (س) مقعر لأعلى في $(-∞, ٢]$ ومقعر لأسفل في $[٢, ∞)$

(٤) إذا علمت أن للاقتران ٣ نقاط حرجة هي $\{-٢, ٢, ٦\}$ أوجد

«أ» القيم القصوى للاقتران

ق' (-٢) = صفر لأنها حرجة للاقتران ق (س)

ق' (س) < صفر كما في الشكل

∴ ق (-٢) صفري محلية

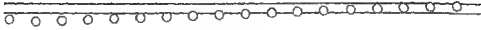
وكذلك ق' (٢) = صفر لأنها حرجة للاقتران

ق' (س) > صفر كما في الشكل

∴ ق (٢) عظمى محلية

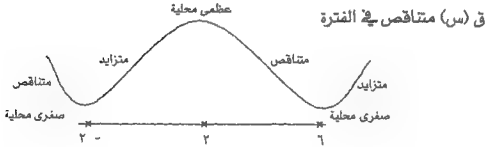
وكذلك ق' (٦) = صفر من الشكل المجاور كونها حرجة للاقتران

ق' (٦) < صفر من الشكل المجاور



∴ ق (٦) صغرى محلية

اب» أوجد فترات تزايد وتناقص ق(س)



ومن الرسم:

ق(س) متناقص في الفترات $(-\infty, -2) \cup (2, 6)$

ق(س) متزايد في الفترات $(-2, 2) \cup (6, \infty)$

مثال: بين أن الاقتران ق(س) = جاس (١ + جتا س) قيمته عظمى محلية

عندما $s = \frac{\pi}{3}$

البيان يكمن في قيمة ق(س) أي:

ق(س) = صفر كونها نقطة حرجة

∴ ق(س) = (الاول * مشتقة الثاني + الثاني * مشتقة الاول

$$= (جاس) (- جاس) + (١ + جتا س) (جاس)$$

$$= - جاس^2 + جتا س + جاس = صفر$$

والآن نموض $\frac{\pi}{3}$ لتحقيق ق($\frac{\pi}{3}$) = صفر

$$\therefore ق(\frac{\pi}{3}) = - جاس^2 + جتا س + جاس = \frac{\pi^2}{3} جتا^2 + \frac{\pi}{3} جتا + \frac{\pi}{3}$$

$$= - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1+2+3}{6} = \text{صفر هذا القسم الأول}$$

ثم نجد ق (س) هكذا :

$$2 \text{ جاس} \times \text{جتاس} \times 1 - (\text{جاس}) + 2 \text{ جتاس} (\text{جاس}) \times 1$$

$$= 2 \text{ جاس جتاس جتاس} - \text{جاس} - 2 \text{ جتاس جاس} = - \text{جاس} - 4 \text{ جاس جتاس}$$

$$= - \text{جاس} - 2 \text{ جاس} \{ \text{جاس} = 2 \text{ جاس جتاس} \}$$

ق ($\frac{\pi}{3}$) يجب أن يكون سالب

$$\text{ومنها ق (} \frac{\pi}{3} \text{)} = - \text{جاس} \frac{\pi}{3} - 2 \text{ جاس} \frac{\pi}{3} = - \frac{\pi}{3} (2 \text{ جاس} + \text{جاس})$$

$$= - \frac{\pi}{3} (3 \text{ جاس}) = - \pi \text{ جاس}$$

وهذه كمية سالبة

∴ عندما س = $\frac{\pi}{3}$ هناك قيمة عظمى للاقتران

سادساً: مسائل على القيم القصوى

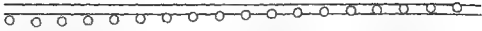
تظهر هذه المسائل بكثرة في الهندسة والفيزياء معاً ولكن بعد أن تصاغ هذه المسائل بشكل رياضي مجرد فإنه يمكن حلها بطرق التحليل الرياضي المتمثل بالاشتقاق وعلى الخطوات التالية:

إيجاد ق (س) بعد صياغة السؤال على شكل اقتتران يحوي «متغيراً واحداً

فقط»

ثم جعل ق (س) = صفر عند القيم العظمى والصغرى على السواء

ونستدل على هذه المسائل بوجود أكبر، أصغر، أقل، أكثر، أعظم، أدنى وغيرها من الألفاظ التي تدل على القيم القصوى.



مثال: عددان موجبان مجموعهما ٦٠ ومجموع مربيعهما أقل ما يمكن؛
فما العددان ؟

نفرض أن العدد الأول s والثاني v

والآن نطرد v ونبقي s لنكون اقتران بمتغير واحد فقط هكذا

من المعطيات: مجموع العددين ٦٠

$$s + v = 60$$

ومنها $v = 60 - s$ العدد الثاني

أي أن العدد الأول s ، والعدد الثاني $v = 60 - s$ والمتغير واحد فقط

والآن نصوغ الاقتراح هكذا:

$$Q(s) = s^2 + (60 - s)^2 \text{ مجموع مربيعهما أقل ما يمكن}$$

$$\text{أي أن } Q'(s) = 2s + 2(60 - s)(-1) = 0 \text{ صفر}$$

$$2s - 120 + 2s = 0 \text{ صفر}$$

$$4s = 120$$

$s = 30$ العدد الأول

$$v = 60 - s = 30 \text{ العدد الثاني}$$

$$\{30, 30\} \text{ العددان}$$

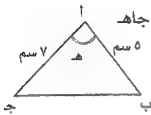
وتحقق بأن مجموع مربيعهما أقل ما يمكن أي $Q'(s) < 0$ صفر كونها قيمة

صغرى

$$Q''(s) = 4 > 0 \text{ صفر}$$



مثال: مثلث طولاً ضلعيه ٥ سم، ٧ سم والزوايه المحصوره بينهما هـ جد قيمه الزاويه هـ التي تجعل مساحه المثلث اكبر ما يمكن.



مساحه المثلث = $\frac{1}{2} \times \text{الضلع الأول} \times \text{الضلع الثاني} \times \text{جاء}$

$$م = \frac{1}{2} \times ٧ \times ٥ \times \text{جاء}$$

$$م = \frac{٢٥}{2} \times \text{جاء}$$

$$م = \frac{٢٥}{2} \times ١ = ١٢,٥ \text{ صفر}$$

مر

ومنها $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ولكن مجموع قياسات زوايا المثلث π فقط

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = ٩٠^\circ$$

مثال: يتحرك جسيم حسب العلاقة $٩ - ٤٢ + ٢٧ - ٨ + ٩$

أوجد أقل تسارع له

بما أن التسارع = $\frac{dv}{dt}$ المشتقة الثانية للمسافة بالنسبة للزمن

فإن أقل تسارع = $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}$ المشتقة الثالثة

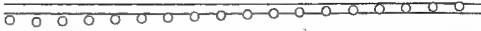
$$ع = \frac{dv}{dt} = ٩ - ٤٢ + ٢٧ - ٨ + ٩$$

$$ت = \frac{dv}{dt} = ٩ - ٤٢ + ٢٧ - ٨ + ٩$$

$$\text{أقل تسارع} = \frac{dv}{dt} = ٩ - ٤٢ + ٢٧ - ٨ + ٩ = \text{صفر}$$

$$\text{ومنها } ٩ = \frac{٧٢}{٢٤} = ٣ \text{ ثواني}$$

$$\text{ومنها أقل تسارع: } ت = ٩ - ٤٢ + ٢٧ - ٨ + ٩ = ١٠٨ - ٢١٦ = -١٠٨ \text{ م/ث}^٢$$



سابعاً: التطبيقات الاقتصادية على التفاضل

من تطبيقات التفاضل العديدة والمفيدة المسائل الاقتصادية التي تتطلب من مستخدميها اتخاذ القرارات الصائبة في الشركات والمصانع لإنتاج العدد المناسب من السلع كونه الإنتاج الأمثل هو الإنتاج الذي يؤدي إلى أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة التي تؤدي بدورها إلى أكبر ربح، وهذه التطبيقات لا تختص بالتجار ورجال الأعمال فقط بل إن معظم الناس في هذا الوقت بالذات يسعون بخطى القيم القصوى في مجال الاقتصاد فهم يحبذون الحصول على أعلى الإيرادات ولا يفرطون إلا بأدنى المصروفات كي يوفرُوا من النقود ما يشاؤون.

وتتلخص هذه التطبيقات في هذه القوانين والمصطلحات:

عندما ينتج أحد المصانع س وحدة من سلعة ما في زمن معين وبيعها بسعر الوحدة الواحدة ع وحدة نقدية يجد الخبير الاقتصادي في ذلك المصنع أمامه عدداً من القوانين نلخصها كما يلي:

ك (س): اقتران التكلفة الكلية Cost Function

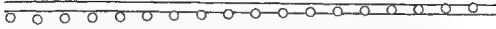
د (س): اقتران الإيراد الكلي Verenue Function

ر (س): اقتران الربح الكلي Profit Function

والعلاقة بين هذه الاقترانات هي

$$ر (س) = د (س) - ك (س) \dots\dots\dots (١)$$

والجدير بالذكر أن المشتقة الأولى لاقتران التكلفة الكلية ك (س) تسمى التكلفة الحدية وهي معدل تغير التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة ويُرمز لها بالرمز ك' (س) والمشتقة الأولى لاقتران الإيراد الكلي د (س) تسمى الإيراد الحدي



وهي معدل التغير في الإيراد بالنسبة للوحدة المباعة في اللحظة التي يباع فيها س من الوحدات ويرمز لها بالرمز \bar{D} (س)

وكذلك المشتقة الأولى لاقتزان الربح الكلي R (س) تسمى الربح الحدي وهي معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات س المباعة ويرمز لها بالرمز R' (س)

والعلاقة بين المشتقات الثلاث هي

$$\bar{R}'(S) = \bar{D}(S) - K'(S) \quad (2)$$

والإيراد الناتج عن بيع س وحدة من السلعة بسعر وحدة نقدية هو:

$$D(S) = \text{عدد الوحدات المباعة} \times \text{سعر الوحدة}$$

$$R(S) = S \times C \quad (3)$$

وحتى يحقق المصنع أو الشركة أكبر ربح ممكن يجب أن نجعل:

$$R'(S) = 0 \quad (1)$$

أو (2) $K'(S) = 0$ = صفر لتحقيق أقل تكلفة والتي تؤدي إلى أكبر ربح

أو (3) $D'(S) = 0$ = صفر لتحقيق أكبر إيراد والذي يؤدي إلى أكبر ربح

كمثال: وجدت شركة لإنتاج ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية K (س)

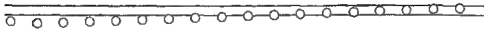
$$K(S) = 0.001S^2 + 0.5S + 200$$

$$\text{وأن الربح الناتج من بيع س وحدة هو } R(S) = 0.2S$$

أوجد

(1) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(2) الإيراد الحدي والربح الحدي



الحل: بما أن ك (س) = $200 - 0.001س + 0.002س^2$

فإن ك (س) = $200 - 0.001س + 0.002س^2$ = صفر (أكبر ربح أو أقل تكلفة)

$$\frac{0.004س}{0.004} = \frac{0.002س^2}{0.004}$$

س = $\frac{0.004س}{0.004} = \frac{0.002س^2}{0.004} = 250$ لعبة يجب إنتاجها لتكون التكلفة أقل ما

يمكن

وبما أن الإيراد الكلي من القانون: ر (س) = د (س) - ك (س)

ومنه $0.2س = د (س) - (200 - 0.001س + 0.002س^2)$

أي أن $0.2س = د (س) - (200 - 0.001س + 0.002س^2)$

ومنه د (س) = $200 - 0.001س + 0.002س^2 + 0.2س$

$$200 + 0.15س + 0.001س^2$$

وعندما س = 250

$$د (250) = (0.001(250) + 0.15(250) + 200) = 250$$

$$581.25 = 200 + 375 + 6.25 =$$

الإيراد الحدي = د (س) = $0.002س + 0.15$

والربح الحدي = ر (س) = 0.2

مثال: وجد مصنع للأثاث أن التكلفة الكلية للإنتاج الأسبوعي من غرف

النوم والتي عددها س تقدر بالاقتران:

$$ك (س) = 50 - 0.001س + 0.002س^2$$

فإذا بيعت كل غرفة نوم بمبلغ 2800 دينار

ما هو الإنتاج الأسبوعي من غرف النوم ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن؟

الحل: بما أن $r = d(s) = 2800 - 3s$

وأن $d(s) = s \times c = 2800 - 3s$

∴ $r(s) = (s) - (2800 - 3s) = 4s - 2800$

ومنه $r'(s) = 4 = 0 \Rightarrow s = 700$

ولتحقيق أقصى ربح ممكن، $r'(s) = 0$

∴ $r'(s) = 4 - 3 = 1 > 0$ عند $s = 700$ = صفر

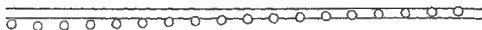
وبعد تبسيط المعادلة وترتيبها:

$s^2 - 2s - 960 = 0$ = صفر

$(s - 32)(s + 30) = 0$ = صفر

$s - 32 = 0$ = صفر

$s = 32$ غرفة نوم يجب أن ينتج المصنع أسبوعياً لتحقيق أقصى الأرباح.



(٢١ - ٥) أمثلة محلولة على التفاضل

مثال ١: أوجد ق (س) لكل من الاقترانات التالية بواسطة التعريف

(١) ق (س) = س^٢

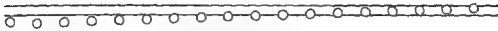
$$\begin{aligned} \text{الحل: ق (س)} &= \text{نها} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{\text{س}^2 + ٢\text{س هـ} + \text{هـ}^2 - \text{س}^2}{\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{\text{س}^2 + ٢\text{س هـ} + \text{هـ}^2 - \text{س}^2}{\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{\text{هـ} (٢\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ}} \\ &= ٢\text{س} \end{aligned}$$

(٢) ق (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، س ≠ صفر

$$\begin{aligned} \text{الحل: ق (س)} &= \text{نها} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{\frac{1}{\text{س + هـ}} - \frac{1}{\text{س}}}{\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{\frac{\text{س} - (\text{س + هـ})}{\text{س}(\text{س + هـ})}}{\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{\text{س} - \text{س} - \text{هـ}}{\text{س}(\text{س + هـ})\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{-\text{هـ}}{\text{س}(\text{س + هـ})\text{هـ}} \\ &= \text{نها} \frac{-1}{\text{س}(\text{س + هـ})} \\ &= \frac{-1}{\text{س}^2} \end{aligned}$$

(٣) ق (س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، س > -١ حيث س + ١ > صفر ، س > -١

$$\text{الحل: ق (س)} = \text{نها} \frac{\text{ق (س + هـ)} - \text{ق (س)}}{\text{هـ}}$$



$$= \frac{\sqrt{1+s} + \sqrt{1+h+s}}{\sqrt{1+s} + \sqrt{1+h+s}} \times \frac{\sqrt{1+s} - \sqrt{1+h+s}}{\sqrt{1+s} - \sqrt{1+h+s}} \quad \text{نها} =$$

$$= \frac{1 - 1 - h - s}{(\sqrt{1+s} + \sqrt{1+h+s}) \cdot (-h - s)} \quad \text{نها} =$$

$$= \frac{h}{(\sqrt{1+s} + \sqrt{1+h+s}) \cdot (-h - s)} \quad \text{نها} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+s}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+s} + \sqrt{1+h+s}} \quad \text{نها} =$$

ويمكن التحقق من صحة الحل بواسطة القاعدة:

$$ق(س) = \sqrt{1+s} \quad \leftarrow \quad \text{فإن } ق'(س) = \frac{1}{2\sqrt{1+s}}$$

والتفسير: مشتقة الاقتران المجذور في الجذر التربيعي = مشتقة ما بداخله
ضعف الجذر التربيعي

$$\text{أي أن } \frac{1}{2\sqrt{1+s}} = \frac{1}{2\sqrt{1+s}} = \frac{1}{2\sqrt{1+s}} \quad \text{نفس الجواب}$$

مثال ٢: أوجد

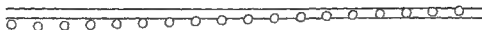
$$(١) \quad ق'(٢) \quad \text{إذا كان } ق(س) = 1 - س^2$$

$$\text{الحل: } ق'(س) = -2س$$

$$ق'(٢) = -2(٢) = -٤$$

$$(٢) \quad ق'(-٣) \quad \text{إذا كان } ق(س) = \begin{cases} ٣س^2, & س \geq ١ \\ ١ - س^2, & س < ١ \end{cases}$$

الحل: نفرط التعريف عند الاشتقاق هكذا



$$\left. \begin{array}{l} \text{ق (س)} = ٢ \\ \text{س} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{القاعدة الأولى} \\ \text{س} > ١ \\ \text{س} = ١ \\ \text{القاعدة الثانية} \\ \text{س} < ١ \end{array}$$

ولكون:

$$\text{ق (١)} = \text{ق (١)} = ٢$$

فإن ق (١) = ٢ كما هو واضح أعلاه

$$\therefore \text{ق (- ٣)} = \text{ق (- ٢)} = ٦ \quad \text{حسب القاعدة الأولى}$$

$$\text{مثال ٢: أوجد معادلة المماس المرسوم للمنحنى ق (س) = } \frac{1}{٢ + \text{س}}, \text{ س} \neq$$

- ٢ عند النقطة (- ٣، ١) وكذلك أوجد معادلة العمودي عليه عند تلك النقطة

الحل: في البداية نعوض النقطة (- ٣، ١) لمعرفة فيما إذا كانت هي

نقطة التماس أم لا.

$$\text{ق (- ٣)} = \frac{1}{١ - ٢ + ٣} = ١$$

\therefore (- ٣، ١) تقع على المنحنى وعلى المماس فهي نقطة التماس.

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = \text{بما أن م المماس}$$

$$\frac{1 - (٢ + \text{س}) \times \text{صفر} - (١) (١)}{(٢ + \text{س})^2} =$$

$$\text{فإن ق (- ٣)} = \frac{1 - (١ - ٢)}{(١ - ٢)^2} = ١$$

معادلة المماس:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م المماس} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - (1 -) = (1 -) \text{ م المماس} (\text{س} - (-2))$$

$$\text{ص} + 1 = \text{س} - 2$$

$$\text{ص} - \text{س} = 1 - 2 = -1$$

$$\therefore \text{معادلة المماس: } \boxed{\text{ص} - \text{س} = -1}$$

معادلة العمودي عليه عند نقطة التماس

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م المماس} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{لكن م العمودي} = \frac{1 -}{1 - \text{م المماس}} = \frac{1 -}{1 - \text{م المماس}} \times \text{م العمودي عليه} = 1 -$$

(ككونهما متعامدان)

$$\text{ص} - (1 -) = (1 -) \text{ م المماس} (\text{س} - (-2))$$

$$\text{ص} + 1 = \text{س} + 2$$

$$\text{ص} = \text{س} + 2 - 1 = \text{س} + 1$$

$$\text{معادلة العمودي: } \boxed{\text{ص} = \text{س} + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٤: إذا كان ق (س)} \\ \text{ص} \geq 1 + \text{س}^2, \text{ صفر} \\ \text{ص} < 1 - \text{س}^2, \text{ صفر} \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

$$\text{أوجد ق (س)، ق (2-)، ق (صفر)، ق (2)، ق (س)}$$

الحل: نقرئ التعريف عند الاشتقاق

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق (س)} = \left. \begin{array}{l} \text{مشتقة القوس} \times \text{مشتقة ما بداخله} \\ \text{غير موجودة} \\ \text{مشتقة القوس} \times \text{مشتقة ما بداخله} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ص} > 1 + \text{س}^2 \\ \text{ص} = \text{صفر} \\ \text{ص} < 1 - \text{س}^2 \end{array}$$

∴ ق (صفر) غير موجودة

ق' $(2 -) = 2 + (2 -) = 2 -$ نأخذ القاعدة الأولى

ق (صفر) غير موجودة كما هو واضح أعلاه

ق٢ = (٢) ٢ = (٢) ٢ - (٢) ٢ = ٢ - ٤ = ٢ - ٢ = ٠ نأخذ القاعدة الثانية

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \text{ ، } \text{س} > \text{صفر} \\ ٢ \text{ ، } \text{س} = \text{صفر} \\ ٢ \text{ ، } \text{س} < \text{صفر} \end{array} \right\} = \text{ق}^{\circ}(\text{س})$$

لاحظ أن ق (صفر) غير موجودة، لكن ق (صفر) موجودة = ٢

هذا يحدث لأن ق (س) متصل عند س = صفر كما هو واضح أعلاه

◀ مثال ۵ :

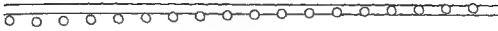
(۱) $\text{أوحد ق (س)} \text{ للاقتران ق (س)} = (\text{س}^1 - 1) (\text{س}^3 - \text{س})$

$$\frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} = (2) \text{ أوجد } (1) \text{ للاقتراح } (s) =$$

الحل:

(١) نستخدم قانون: مشتقة حاصل ضرب اقترانين كما يلي:

قَ (س) = الأول * مشتقة الثاني * الثاني * مشتقة الأول



$$= (س^2 - 1) (1 - س) + (س - 3) (س^2)$$

$$= س^3 - س^2 + 1 - س^2 - 3س + 3س^2$$

$$= س^3 - 2س^2 - 3س + 1$$

(١) نستخدم قانون: مشتقة خارج قسمة اثنانين كما يلي:

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = ق(س)$$

$$= \frac{(س^2 + 1) (س^2 - 3س - 1) - (س^2 - 1) (س^2 + 1)}{(س^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-س^4 - 2س^3 - 2س^2 - 1 - س^4 + س^2 + 1}{(س^2 + 1)^2} = \frac{-2س^4 - 2س^3 - 2س^2}{(س^2 + 1)^2}$$

$$\therefore ق(س) = \frac{-2س^2 (س^2 + س + 1)}{(س^2 + 1)^2}$$

$$1 - = \frac{1 -}{1} = \frac{1 -}{(2)}$$

مثال ٦: أوجد إحداثيات نقط التماس التي يكون عندها المماسات

المرسومة للاقتران ق(س) = (س - ٢) (س - ١) أفقية:

الحل: ميل المماس الأفقي = صفر حيث يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور

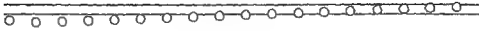
السينات زاوية قياسها صفر (كون ظل صفر = صفر، ميل المماس)

$$\therefore \text{مماس} = \text{صفر}$$

$\therefore ق(س) = \text{صفر}$ ، مشتقة حاصل ضرب اثنانين

$$\text{أي أن } (س - ٢) (س - ١) + (س^2 - ١) (س - ١) = \text{صفر}$$

$$٢س^2 - ٥س + ٢ + س^3 - س^2 - ١١ = \text{صفر}$$



$$٣ \text{ س } ٢ - ٦ \text{ س } - ٩ = \text{ صفر} \text{ بالقسمة على } ٢$$

$$\text{س } ٢ - ٢ \text{ س } - ٣ = \text{ صفر}$$

$$(\text{س} + ١) (\text{س} - ٣) = \text{ صفر}$$

$$\text{س}_١ = -١, \text{س}_٢ = ٣$$

$$\therefore \text{س}_١ = \text{ق} (\text{س}_١) = \text{ق} (-١) = (-١ - ١ + ١) (٢ - ١ - ١) =$$

$$٢٧ = (-٣) (-٩) =$$

$$\therefore (-١, ٢٧) \text{ النقطة الأولى}$$

$$\text{وكذلك صفر} = \text{ق} (\text{س}_٢) = \text{ق} (٣) = (٣ - ٣) (٢ - ٩ - ٣) =$$

$$٥ - = (-٥) (١) =$$

$$\therefore (٣, -٥) \text{ النقطة الثانية}$$

مثال ٧: أوجد أ، ب لتكون مشتقة الاقتران

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ س } ٢ + \text{ب س } + ٢ \geq \text{س} \\ \text{ب س } ٢ - ١ < \text{س} \end{array} \right\} = \text{ق} (\text{س})$$

اقتران متصل على ح.

ملحوظة: □

لتكون ق (س) اقتران متصل على ح يجب أن يكون ق (س) متصل على ح

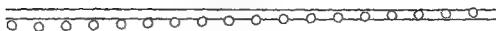
أيضاً.

أولاً: كون ق (س) اقتران متصلاً عند $\text{س} = ٢$

فإن نها ق (س) = نها ق (س) (النهاية موجودة وتساوي القيمة عند الحاجة)

$$\text{س} \rightarrow ٢ \quad \text{س} \rightarrow ٢$$





نها ق (س) = $أ + {}^2(٢) ب + (٢) = ٢ + ٢ + ٨ = ١٢$ من اليسار
س ← ٢

نها ق (س) = $ب - {}^2(٢) = ١ - ٤ = -٣$ من اليمين
س ← ٢

$$\therefore ١٢ + ٢ = ١٤ = ب - ٤$$

$$\textcircled{١} \quad ١٢ - ٢ = ١٠ = ب - ٢$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق (س)} = ١٢ \text{ س} + ٢, \text{ س} > ٢ \\ \text{س} = ٢ \\ \text{ق (س)} = ٢ \text{ س} - ٢, \text{ س} < ٢ \end{array} \right\}$$

$\therefore \text{ق (٢)} = \text{ق (٢)}$ تكونها متصلة أي المشتقة من اليسار = المشتقة من اليمين

$$\therefore ١٢ + ٢ = ١٤ = ب - ٤$$

$$١٢ + ١ = ١٣ = ب - ٤$$

$$\textcircled{٢} \quad ١٢ - ١ = ١١ = ب - ٤$$

ويحل المعادلتين بالحذف مثلاً

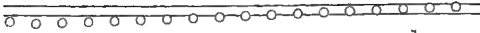
«لحذف ب»

$$\begin{array}{r} \textcircled{١} \quad ١٢ - ٢ = ١٠ = ب - ٢ \\ \textcircled{٢} \quad ١٢ - ١ = ١١ = ب - ٤ \end{array}$$

$$- ١٢ + ١ = - ١١ = ب - ٤$$

$$١٢ - ١ = ١١ = ب - ٤$$

$$- ١٢ + ١ = - ١١ = ب - ٤$$



$$2 - = \frac{1}{3} = 1$$

لكن $12 - 1 - 2 = \text{صفر}$

$$\therefore 12 - (2 -) - 2 = \text{صفر}$$

$$24 = 2 -$$

$$8 - = \frac{24}{3} = 8$$

$$\therefore \boxed{8 - = 2 - , 2 - = 1 -}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 > 1 - 2 - 8 , \text{ من } 2 \\ 2 = 22 - , \text{ من } 2 \\ 2 < 16 - , \text{ من } 2 \end{array} \right\} = \text{وتصبح ق (س)}$$

لاحظ أنها متصلة ق (س) متصلة

مثال ٨:

$$(١) \text{ إذا كان ق (س) } = \frac{1}{3} \text{ من } 2 + \frac{1}{3} \text{ من } 2 + 1$$

أوجد ق (س)

الحل:

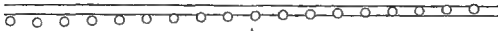
$$\text{ق (س)} = \left(\frac{1}{3} \right) (3) \text{ من } 2 + \left(\frac{1}{3} \right) (2) \text{ من } 1$$

$$= 1 + 2 \text{ من } 2$$

$$\text{ق (س)} = 1 + 2$$

$$\text{ق (س)} = 2$$

وبقية المشتقات من ق (س) حتى ق (س) جميعها تساوي صفراً لكل منها ^(٢) ^(٤)



$$(٢) \text{ إذا كان ق (س) = س}^٢ - \frac{١}{س} ، \text{ س} \neq \text{صفر}$$

أوجد ق' (س)

$$\text{الحل: ق (س) = س}^٢ - \frac{١}{س}$$

$$\text{ق' (س) = س}^٢ + \frac{١}{س^٢}$$

$$\text{ق' (س) = س}^٢ - \frac{١}{س} = ١٢ - \frac{١}{س} = ١٢ - \frac{١}{١٢} = \frac{١٤٣}{١٢}$$

$$(٢) \text{ إذا كان ص = س}^٢ + \frac{١}{س} ، \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

الحل:

$$\frac{دص}{دس} = \text{مشتقة القوس} \times \text{مشتقة ما بداخله (قانون السلسلة)}$$

$$= ١ - \left(\text{س}^٢ + \frac{١}{س} \right)' = ٢\text{س} - \frac{١}{س^٢}$$

$$= \frac{١ + ٦ + ٣٦}{\left(\text{س}^٢ + \frac{١}{س} \right)^٢}$$

$$\frac{٤٣}{(٦ + ١٨ + ٣٦)} = \frac{١ + ٦ + ٣٦}{\left(\text{س}^٢ + \frac{١}{س} \right)^٢} = \frac{٤٣}{٩٦}$$

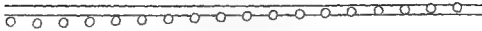
$$\frac{٤٣}{٩٦} = \frac{٤٣}{٩٦ \times ٩٦} = \frac{٤٣}{٩٢١٦}$$

مثال ٩: إذا كان ق (صفر) = ١ ، ق' (صفر) = ٢ ، ق' (٢) = ١

هـ (صفر) = ٢ ، هـ' (صفر) = ١ ، هـ' (٢) = صفر

أوجد (١) (ق هـ) (صفر)

(٢) (هـ ق) (صفر)



الحل: بما أن (ق ° هـ)° (س)° = ق° (هـ (س) × هـ° (س)

فإن (ق ° هـ)° (صفر)° = ق° (هـ (صفر) × هـ° (صفر)

$$ق° (٢) × هـ° (صفر) =$$

$$١ = (١) (١) =$$

وبما أن (هـ ° ق)° (س)° = هـ° (ق (س) × ق° (س)

فإن (هـ ° ق)° (صفر)° = هـ° (ق (صفر) × ق° (صفر)

$$هـ° (١) × ق° (صفر) =$$

$$= (صفر) (٢) = صفر$$

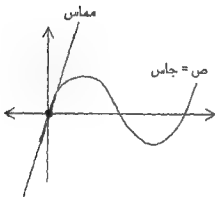
لاحظ أن (ق ° هـ)° (س)° ≠ هـ° (ق° (س)

لأن تركيب الاقترانات غير تبديلي.

مثال ١٠: أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = جاس عند س_١ = صفر

الحل: ص_١ = جاس_١ = جا صفر = صفر

∴ نقطة التماس (صفر، صفر)



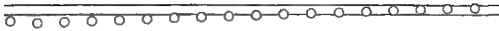
$$مماس = \frac{د ص}{د س} \bigg|_{س=صفر} = جتا صفر = ١$$

∴ معادلة المماس:

$$ص - ص_{١} = م مماس (س - س_{١}})}$$

$$∴ ص - صفر = ١ (س - صفر)$$

ص = س معادلة المماس (كما هو واضح أعلاه)



مثال ١١: إذا كان $(س - ص)^2 - ص = \text{صفر}$

أوجد $\frac{دص}{دس}$ ، ثم $\left| \frac{دص}{دس} \right|_{(١,٢)}$

الحل: إنه الاشتقاق الضمني إن كنت لا تدري! ولكن بعد فلك القوس ٩

$$س^2 - ٢ص + ص = ص^2 - ص = \text{صفر}$$

$$س^2 - ٢ص + ص = \frac{دص}{دس} \cdot ١ - \frac{دص}{دس} \cdot ٢ = \text{صفر}$$

$$س^2 - ٢ص + ص = \frac{دص}{دس} \cdot ١ - \frac{دص}{دس} \cdot ٢ = \text{صفر}$$

$$س^2 - ٢ص + ص = \frac{دص}{دس} \cdot ١ - \frac{دص}{دس} \cdot ٢ = \text{صفر}$$

$$\frac{دص}{دس} (س^2 - ٢ص + ص) = ١ - ٢ = -١$$

$$\frac{س^2 - ٢ص + ص}{س^2 - ٢ص + ص} = \frac{دص}{دس} = -١$$

$$\frac{٤ - ٢}{١ - ٤ - ٢} = \frac{(٢)^2 - (١)^2}{١ - (٢)^2 - (١)^2} = \frac{دص}{دس} \Big|_{(١,٢)}$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} =$$

مثال ١٢: عيّن مجالات التزايد والتناقص للاقتران

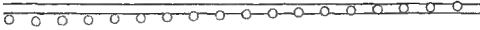
$$\left. \begin{array}{l} ١ > ص ، \\ ٢ \geq ١ ، \\ ١ \geq ٢ ، \end{array} \right\} = (س) \quad \left. \begin{array}{l} ٢ - س ، \\ ٢ - س ، \\ ١ - س ، \end{array} \right\}$$

الحل: نجد أولاً ق (س) لتحديد النقط الحرجة ومجالات التزايد والتناقص

(نفرط التعريف عند الاشتقاق)

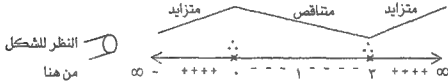
$$\left. \begin{array}{l} ١ > ص ، \\ ١ = ص ، \\ ٢ > ص ، \\ ٢ = ص ، \\ ٣ > ص ، \end{array} \right\} = (س) \quad \left. \begin{array}{l} ٢ - س ، \\ ٢ - س ، \\ ٢ - س ، \\ ٢ - س ، \\ ٣ - س ، \end{array} \right\}$$

التفاضل وتطبيقاته



إشارة في (س)

$$- \text{ س}^2 = \text{صفر} \leftarrow \text{س} = \text{صفر نقطة حرجة}$$



من الشكل أعلاه لإشارة في (س) نعين:

$$\text{ق (س) متزايد في الفترات } (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

$$\text{ق (س) متناقصة في الفترة } [0, 2]$$

مثال ١٣: أوجد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات التالية ثم حدد

نوعها «صغرى محلية أو عظمى محلية»

$$(١) \text{ ق (س) = س}^2 - (١ - \text{س}) \text{ كحاصل ضرب اقترانين}$$

نجد في (س) لتحديد النقاط الحرجة التي يمكن أن تعين قيم قصوى.

$$\text{الحل: ق (س) = (س}^2 - (١ - \text{س})) + (١ - \text{س}) = (٢\text{س})$$

$$- = \text{س}^2 + \text{س}^2 - \text{س}^2$$

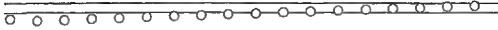
$$\text{.} \text{ ق (س) = س}^3 - \text{س}^2$$

$$\text{ويحل المعادلة } (- \text{س}^3 + \text{س}^2 = \text{صفر})$$

$$\text{س}^3 - \text{س}^2 = \text{صفر}$$

$$\text{س (س}^3 - \text{س}^2) = \text{صفر}$$

$$\text{س = صفر ، س} = \frac{2}{3} \text{ هناك نقطة حرجة يمكن أن تعين قيم قصوى}$$



نجد ق' (س) لتحديد نوع القيمة القصوى هكذا

$$ق' (س) = -6س + 2$$

$$ق' (0) = -6(0) + 2 = 2 > 0 \text{ موجبة } \therefore \text{ صفر س}$$

$$\therefore \text{ الصغرى المحلية } = ق(0) = (0)^2 - (1 - \text{ صفر}) = \text{ صفر}$$

\therefore صفر \leftarrow قيمة صغرى محلية

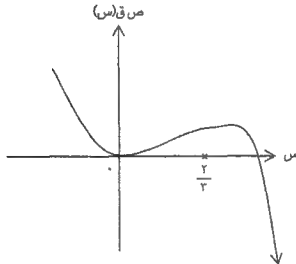
$$ق' \left(\frac{2}{3} \right) = -6 \left(\frac{2}{3} \right) + 2 = -4 < 0 \text{ سالبة / عظمى محلية}$$

$$\therefore ق \left(\frac{2}{3} \right) \text{ عظمى محلية}$$

$$\text{العظمى المحلية} = ق \left(\frac{2}{3} \right) = \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4}{9} \right) =$$

والآن التمثيل البياني لمنحنى ق (س) التقريبي



$$(2) ق(س) = جاس + جتا س ، 0 < س < \pi (للدورة واحدة فقط)$$

الحل:

ق (س) جتا س - جاس = صفر

$$\frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{ بالقسمة على جتا س}$$

$$1 = \text{طا س}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\pi}{\epsilon} \text{ في الربع الأول ، } \frac{\pi}{\epsilon} = \pi + \frac{\pi}{\epsilon} \text{ في الربع الثالث}$$

ولتمييزها إلى معادلة عظمى أو صغرى نجد ق (س)

$$\text{ق (س)} = \text{جتاس} - \text{جاس} = -1 \text{ (جتاس + جتاس)}$$

$$\text{ق (} \frac{\pi}{\epsilon} \text{)} = -1 = \left(\text{جا } \frac{\pi}{\epsilon} + \text{جتا } \frac{\pi}{\epsilon} \right) = -1 \text{ (} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{)}$$

$$-1 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ سالبة ، عظمى}$$

$$\text{العظمى ق (} \frac{\pi}{\epsilon} \text{)} = \left(\frac{\pi}{\epsilon} \right) = \text{جا } \frac{\pi}{\epsilon} + \text{جتا } \frac{\pi}{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ عظمى محلية}$$

$$\text{ق (} \frac{\pi}{\epsilon} \text{)} = -1 = \left(\text{جا } \frac{\pi}{\epsilon} + \text{جتا } \frac{\pi}{\epsilon} \right) = -1$$

$$\text{لكن جا } \frac{\pi}{\epsilon} = \pi + \left(\frac{\pi}{\epsilon} \right) \text{ في الربع الثالث (الجيب سالب)}$$

$$-1 = \frac{\pi}{\epsilon} \text{ جا } \frac{\pi}{\epsilon} = -1$$

$$\text{وكذلك جتا } \frac{\pi}{\epsilon} = \pi + \left(\frac{\pi}{\epsilon} \right) \text{ في الربع الثالث (جيب التمام . الب)}$$

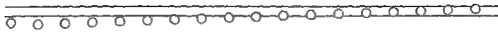
$$-1 = \frac{\pi}{\epsilon} \text{ جتا } \frac{\pi}{\epsilon} = -1$$

$$\therefore \text{ق (} \frac{\pi}{\epsilon} \text{)} = -1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 \text{ (} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{)}$$

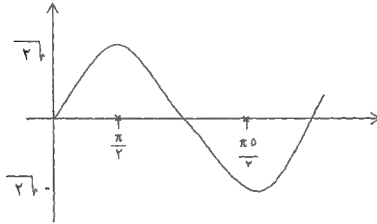
موجبة/صغرى

$$\text{الصغرى المحلية: ق (} \frac{\pi}{\epsilon} \text{)} = \text{جا } \frac{\pi}{\epsilon} + \text{جتا } \frac{\pi}{\epsilon} = -1$$

$$-1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1$$



تمثيل تقريبي للاقتران ق (س) = جاس + جتاس ، $0 < س < \pi 2$



مثال ١٤: إذا كان ق (س) = $س^3 - 2س^2 + 5$

حدد نقط الانعطاف وأوجد قياس زوايا الانعطاف إن وجدت

الحل:

لتحديد نقط الانعطاف ق' (س_١) = صفر

$$ق' (س) = 3س^2 - 4س$$

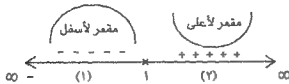
$$ق' (س) = 3س - 4 = 0$$

$$3س - 4 = 0 \text{ صفر}$$

$$س = 4/3$$

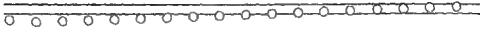
س = ١ يمكن أن تكون نقطة انعطاف شرط أن تغير ق' (س) من إشارتها

حولها.



إشارة ق' (س)

$$ق' (0) = 3(0) - 4 = -4 \text{ سالبة}$$



$$ق(2) = 6 - (2) = 4 \text{ موجبة}$$

∴ (1, ق(1)) نقطة انعطاف

$$\text{أي ق(1) = } 5 - (1) = 4$$

∴ (3, 1) نقطة انعطاف

$$\text{ظا زاوية الانعطاف} = ق(1) = 4 - (1) = 3$$

∴ زاوية الانعطاف هي ظا⁻¹ 3

ي السابـة = 72° أما الموجبة فهي كما يلي:

$$|ي| = |72 - 360| = 288$$

∴ ي = 288 - 360 = 72° في الربع الرابع

$$\text{(كون ظا } 288^\circ = (360 - 288) = 72^\circ \text{ ظا } 72^\circ = 3 \text{ تقريباً)}$$

∴ قياس زاوية الانعطاف = 288°

كمثال ١٥: يتحرك جسيم حسب العلاقة $ق = ١٢ - ٢٠٨ + ٥$

حيث ف المسافة بالأمتار

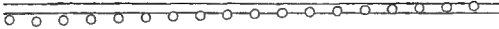
الزمن بالثواني

احسب أقل تسارع له

الحل:

بما أن التسارع: $ث = ف'$ المشتقة الثانية

وبما أن التسارع قيمة صغرى فإن مشتقة $ف' = 0$ صفر



أي أن $F' = \text{صفر}$ أو المشتقة الثالثة = صفر

$$\therefore F' = 4 - 2 \times 36 + 8 = 0$$

ت = $F' = 12 - 2 \times 72 = 0$ هذا هو التسارع

$$F'' = 24 - 0 = 72 = \text{صفر}$$

$$72 = 0 \times 24$$

$$0 = \frac{72}{24} = 3 \text{ ثواني}$$

\therefore أقل تسارع ت (3)

$$= 12 - 2(3) - 72 = (3) 72 - (9) (12) =$$

$$= 108 - 216 = -108 \text{ م}^3/\text{ث}^2$$

أقل تسارع

مثال ١٦: يبيع مصنع ثلاجات س ثلاجة في الأسبوع بسعر م دينار لكل

ثلاجة، إذا كانت العلاقة بين عدد الثلاجات س والسعر م هي $M = 400 - 8S$

وكانت التكاليف الكلية في الأسبوع هي $\frac{1}{4}S^2 + 37S + 600$ دينار

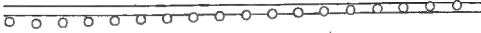
ما هو عدد الثلاجات التي يتوجب إنتاجها أسبوعياً ليكون ربح المصنع

أكبر ما يمكن؟

الحل:

بما أن الربح (المكسب) = الإيراد - التكاليف

$$\therefore R = \text{عدد الثلاجات} \times \text{سعر بيع الثلاجة} - \text{التكاليف الكلية}$$



$$r = (m + \frac{1}{4}) - (2s + 37 + \frac{1}{4}) = 600$$

$$r = (8 - 400) - (2s - 37 - \frac{1}{4}) = 600$$

$$r = 400 - 8 - 2s - \frac{1}{4} = 600$$

أكبر ربح (قيمة قصوى عظمى)

$$r = 0$$

$$r = 400 - 16 - 2s - \frac{1}{4} = 37 - 2s = 0$$

$$- 16 - 2s = - 37 + \frac{1}{4}$$

$$- 16 - 2s = - 36.75$$

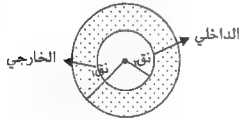
$$s = \frac{36.75}{2} = 18.375$$

مثال ١٧: كرة مجوفة من الحديد يتغير قطرها الداخلي والخارجي عند التسخين بحيث يبقى حجم الحديد المصنوعة منه ثابت.

إذا كان معدل التغير في نصف قطرها الداخلي $\frac{2}{5}$ سم / الدقيقة

أوجد معدل التغير في نصف قطرها الخارجي عندما يكون نصف قطرها

الداخلي ٥ سم والخارجي ٧ سم.



الحل:

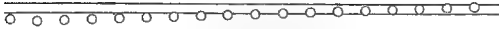
مقطع في الكرة

بما أن حجم الحديد المصنوع منه الكرة

= حجم الكرة من الخارج - حجمها من الداخل وهذا ثابت وتفرضه ح

$$ح = \frac{4}{3} \pi r_1^3 - \frac{4}{3} \pi r_2^3$$

التفاضل وتطبيقاته



$$= \pi \frac{4}{3} (نق_1^3 - نق_2^3) \text{ والاشتقاق بالنسبة للزمن}$$

$$\therefore \frac{د}{د} = \pi \frac{4}{3} \left\{ 3 نق_1^2 \cdot \frac{د نق_1}{د} - 3 نق_2^2 \cdot \frac{د نق_2}{د} \right\}$$

$$\therefore 3 نق_1^2 \cdot \frac{د نق_1}{د} - 3 نق_2^2 \cdot \frac{د نق_2}{د} = \text{صفر}$$

$$\therefore 3 نق_1^2 \cdot \frac{د نق_1}{د} = 3 نق_2^2 \cdot \frac{د نق_2}{د}$$

$$\therefore (7) \cdot \frac{د نق_1}{د} = (25) \cdot \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$\frac{د نق_1}{د} = \frac{(2)(5)}{49} = \frac{10}{49} \text{ سم / الدقيقة}$$

مثال ١٨: قذف جسم رأسياً للأعلى فإذا كانت المسافة المقطوعة بعد

$$٩١٢٠ - ٩٠٥ = \text{ثانية هي ف}$$

أوجد أقصى ارتفاع يصله

الحل:

يصل الجسم أقصى ارتفاع عندما تصبح سرعته ع = صفر

$$\text{لكن ع} = \text{ف} = ١٢٠ - ١٠$$

$$١٢٠ - ١٠ = \text{صفر}$$

$$= ١٢ = \frac{١٢٠}{١٠} \text{ ثانية}$$

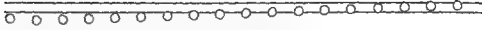
$$\text{ومنه ف} = ١٢٠ - ٩٠٥$$

$$= (١٢٠) (١٢) - (١٢) (١٢) =$$

$$= ١٤٤٠ - (١٤٤) =$$

$$= ٧٢٠ - ٧٢٠ = \text{متراً أقصى ارتفاع}$$





مثال ١٩: إذا كان $ق(س) = ٥ - س^٢$ ، أوجد متوسط التغير للاقتزان

$ق(س)$ عندما تتغير $س$ من ١ إلى ٣

الحل:

$$\frac{ج ص}{ج س} = \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{\{٥ - (٣)^٢\} - \{٥ - (١)^٢\}}{٣ - ١} =$$

$$= \frac{(١ - ٩) - (٤ - ١)}{٣ - ١} =$$

$$= \frac{-٨ - ٣}{٢} = \frac{-١١}{٢}$$

مثال ٢٠: إذا كان للاقتزان $ق(س) = أس^٢ + ب س + ج$ $س = ٥$ نقطة

انعطاف أفقي عند النقطة (١، ١) أوجد قاعدته

الحل:

الانعطاف الأفقي يُعني ثلاثة أبعاد رياضية متكاملة هي:

(١) الاقتران $ق(١)$ يمر بالنقطة (١، ١) أي أن $ق(١) = ١$

(٢) $ق'(١) = ١$ = صفر كون الانعطاف أفقي أي أن ميل المماس = صفر المرسوم منها (٢)

(٣) $ق''(١) = ١$ = صفر كون الانعطاف يجعل $ق''(س) = ١$ عندها (٣)

$$\text{ومنها } ق(١) = ١ = أس^٢ + ب س + ج = ١ + ٠ + ٠ = ١$$

$$\therefore ١ = ١ + ٠ + ٠$$

$$ق(س) = أس^٢ + ب س + ج$$

$$\text{ومنها } ق'(١) = ١ = ٢أس + ب = ٢ + ٠ = ٢$$

قُ (س) = ۶ ا س + ۲ ب

ومنها قُ (٠) = ١٦ + ٢ ب = صفر (٢)

ويحل المعادلات الثلاث بالحذف

ينتج أن

3 - 21

$$12 = 7$$

۱۲ = ج

$$\therefore \text{ق (س)} = - ٤س^٢ + ٢س + ٥$$

مثال ۲۱: إذا كان ق (س) = س^۲ ، هـ (س) = س^۱ أوجد (ق • هـ) (۲)

أي ان ق (س) = ٣ س^٢ ، هـ (س) = ٤ س^٢

قُ (س) = ۶ س ، هُ (س) = ۱۲ س^۲

الحل:

$$[(Y) \times ((Y) \cdot (Q))] = [(Y) \cdot (Q \cdot H)] = (Y) \cdot (Q \cdot H)$$

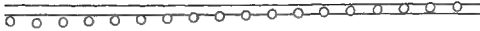
واعتماداً على مشتقة حاصل ضرب اقتصارين

$$= \text{ق}^{\circ} \text{هـ} \times ((\text{ق}^{\circ} \text{هـ}) \times (\text{ق}^{\circ} \text{هـ}) + (\text{ق}^{\circ} \text{هـ}) \times ((\text{ق}^{\circ} \text{هـ}) \times (\text{ق}^{\circ} \text{هـ})))$$

$$= ق (١٦) \times هـ (٢) + هـ (٢) \times ق (١٦) \times هـ (٢)$$

$$r(2) \text{ £ } \times (17 \times 7) \times r(2) \text{ £ } + r(2) \text{ 12 } \times r(17) \text{ 3 } =$$

$$32 \times 97 \times 32 + (8 \times 12) \times (206 \times 3) =$$



$$32 \times 96 \times 22 + 48 + 768 =$$

$$135168 = 98304 + 36864 =$$

وهناك طريقة أخرى وهي أن نركب الاقتران

(ق ° هـ) (س) ثم نجد مشتقته الثانية هكذا

$$(ق ° هـ) (س) = ق (هـ (س)) = ق (س^2)$$

$$12 (س^2) = 24 س$$

$$(ق ° هـ) (س) = 12 س$$

$$(ق ° هـ) (س) = 12 \times 11 س = 132 س$$

$$\therefore (ق ° هـ) (2) = 132 \times 2 = 264$$

$$135168 =$$

«نفس الجواب»

(٢١ - ٦) أسئلة وتدريبات وقوانين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق (س) = $\frac{1}{س^٢ - ٣س + ٢}$ وميزها إلى عظمى أو صغرى

(٢) أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما

$$»١« ص = \sqrt{٢ - س} - \frac{1}{س}$$

$$»٢« ص = (١ - س) \left(١ - \frac{1}{س} \right)$$

$$»٣« ص = \frac{(١ - س)(١ + س)}{س}$$

(٣) أوجد القيم القصوى المحلية ونوعها للاقتارات التالية:

$$»١« ق (س) = س^٢ - ٦س + ٨$$

$$»٢« ق (س) = س^٢ + ٤س - ٣س^٣ + ١$$

$$»٣« ق (س) = س - \frac{٤}{س}$$

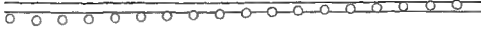
(٤) أوجد ق (س) ، ق (س) لكل من الاقتارات

$$»١« ق (س) = ٣س^٣ - ٧س + ٦$$

$$»٢« ق (س) = (١ - س)(٢ + س)$$

$$»٣« ق (س) = (١ - س)(٢ + س)(٢ - س)$$

التفاضل وتطبيقاته



$$(5) \text{ يتحرك جسيم حسب العلاقة } 5 = 4 - 2 + 2 + 2$$

حيث x المسافة بالأمتار، t الزمن بالثواني

احسب تسارعه عندما تنعدم سرعته.

(٦) أوجد النقط الحرجة للاقتزان

$$Q(x) = 2x^2 - 9x + 12 \text{ س - ١}$$

{عندما $s = 1, 2$ }

$$(7) \text{ يتحرك جسيم حسب العلاقة } 5 = 2 - 2 + 2 + 2$$

حيث x المسافة بالأمتار، t الزمن بالثواني

احسب أقل سرعة له

{٢ م / ث}

(٨) أكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $A(1, -1)$ والذي يعامد المستقيم الذي

$$\text{معادلته } 2x + 5y = 3$$

{ $5x - 2y = 7$ }

$$(9) \text{ إذا كانت } v = s \text{ أوجد } \frac{dv}{ds}$$

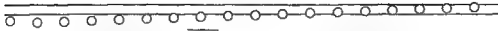
إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ.

$$(10) \text{ أكتب معادلة المماس للمنحنى } Q(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} \text{ عند النقطة } (\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$$

{ $4x - \frac{1}{x} = 5$ }



التفاضل وتطبيقاته



(١١) أكتب معادلة المماس للمنحنى ق (س) = r س عند النقطة (٤ ، ١٦)

$$\left\{ \text{ص} = \frac{1}{8} \text{س} + 2 \right\}$$

(١٢) أوجد $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}$ | للعلاقة $\text{ص}^2 \text{س} + \text{ص}^2 \text{س} = 6$ (١٢ ، ١)

$$\left\{ -\frac{8}{9} \right\}$$

(١٣) أوجد ق (س) للاقتران ق (س) = $\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{ص}(\text{س} - 1)}$

(١٤) أوجد ق (س) للاقتران ق (س) = $2 \text{س} \text{جتا س} + (\text{س}^2 - 2) \text{جا س}$

$$\left\{ 2 \text{س} \text{جتا س} \right\}$$

(١٥) أكتب معادلة المماس للعلاقة

جا (س + ص) = ٢ س عند النقطة (٠ ، π)

$$\left\{ \text{ص} = -\pi + 3 \right\}$$

(١٦) إذا كان $\text{ص}^2 \text{س} + \text{ص}^2 \text{س} = 1$ أوجد $\frac{د\text{ص}}{د\text{س}}$

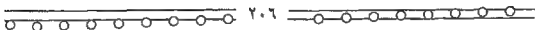
$$\left\{ \frac{1}{\text{ص}} \right\}$$

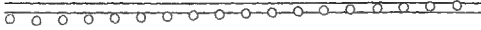
(١٧) بين أن العمودي على المماس للعلاقة $\text{ص}^2 \text{س} + \text{ص}^2 \text{س} = 3$ س ص عند النقطة $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ يمر بنقطة الأصل

إرشاد: نجد معادلة العمودي ونعوض له نقطة الأصل.

(١٨) إذا كان ق ص - ظا س = صفر





أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\left\{ \frac{فا س}{فا س فا ص} \right\}$$

$$(19) \text{ إذا كان } ص^2 = ص^2 + س^2 جا ص + 1 \text{ أوجد } \left| \frac{دص}{دس} \right| \quad (2, 1)$$

$$\{3\}$$

$$(20) \text{ أوجد معادلة المماس للعلاقة } ص^2 + ص^2 = 1 \text{ عند النقطة } \left(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} س + \sqrt{\frac{2}{3}} = ص \right\}$$

$$(21) \text{ ليكن } ق(س) = \frac{1}{2} س^2 + 1 \text{ فما قيمة } ق'(1), ق'(3)$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

$$(22) \text{ إذا كان } ق(س) = س + جا س \text{ أوجد } ق'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right\}$$

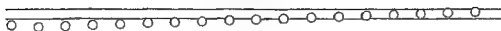
$$(23) \text{ إذا كان } ص = جا س + جتا س \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

$$\{-ص\}$$

$$(24) \text{ إذا كان } ص = 3س^8 - \sqrt{2} س^6 + \frac{3}{4} س^2 + 20س + 1 \text{ أوجد } \left| \frac{دص}{دس} \right| \text{ مر } 1$$

$$(25) \text{ إذا كان } ق(س) = س جا س \text{ أوجد } ق'(س)$$

$$(26) \text{ إذا كان } ق(س) = س جتا س \text{ أوجد } ق'(س)$$



(٢٧) إذا كان ق (س) = س^٢ جا س جتا س أوجد ق (س)

(٢٨) إذا كان ص = جا^٣ س أوجد $\frac{دص}{دس}$

(٢٩) إذا كان ص = $\sqrt{١ + س^٤}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

(٣٠) أوجد ق (س) إذا كان (١) ق (س) = جتا س^٥

(٢) ق (س) = جتا س^٥

(٣) ق (س) = (س - ٢ س^٢)^{١١}

(٣١) إذا كان ق (س) = جتا^٢ س أوجد ق ($\frac{\pi}{٦}$)

$$\left\{ -\sqrt{\frac{٢}{٣}} \right\}$$

(٣٢) إذا كان ص = $\sqrt[٣]{٢س}$ ، س < صفر أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\left\{ -\frac{٣}{٤} س^{\frac{٢}{٣}} \right\}$$

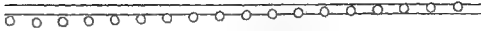
(٣٣) إذا كان ق (س) = جا س أوجد ق (س)

(٣٤) إذا كان س^٢ - ٢ ص = ٩ أوجد $\left| \frac{دص}{دس} \right|$ (٢، ٥)

$$\left\{ \frac{٥}{٨} \right\}$$

(٣٥) أكتب معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = قا س عند س $\frac{\pi}{٤}$

$$\left\{ ص = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} س + \pi \frac{\sqrt{٢}}{٨} + \frac{٢}{٢\sqrt{٢}} \right\}$$



(٣٦) أوجد ق (س) لكل من الاقترانات:

(١) ق (س) = ٢ س جتا س + (س - ٢) جا س {س^٢ جتا س}

(٢) ق (س) = لو_٢ ظا ($\frac{1}{٢}$ س) { $\frac{1}{جا س} = قتا س$ }

(٣) ق (س) = لو_٢ ظا ($\frac{1}{٢}$ س + $\frac{\pi}{٤}$) { - قتا س }

(٣٧) إذا كان ص = هـ لو_٢ (١ + جا^٢ س) أوجد $\left| \frac{د ص}{د س} \right|$ { $\frac{\pi}{٢}$ }
 $\frac{\pi}{٢} = س$

إرشاد: بسط الاقتران ص بأخذ اللوغاريتم إلى الطرفين

فتصبح ص = ١ + جا^٢ س

(٣٨) إذا كان ص = هـ^٢ فما قيمة أ التي تحقق المعادلة ص - ٥ ص + ٦ ص = صفر

{ ٢ , ٣ }

(٣٩) إذا كان ق (س) = $\left\{ \begin{matrix} س > ٢ \\ س - ٤ , س \leq ٢ \end{matrix} \right.$ أوجد ق (٢) { ٤ }

إرشاد: ابحث في اتصاله أولاً

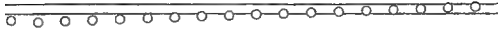
(٤٠) إذا كان ق (س) = $\frac{١ - س^٢}{١ + س^٢}$ أوجد ق (س) { $\frac{٤ س}{٢(١ + س^٢)}$ }

(٤١) أكتب معادلة المماس المرسوم للاقتران ق (س) = جا س - جتا س من النقطة

(١ , $\frac{\pi}{٢}$)

{ ص = س + ١ - $\frac{\pi}{٢}$ }

إرشاد: تحقق أن النقطة تقع على الاقتران، أي أنها نقطة تماس



$$(٤٢) \text{ إذا كان ق(س) } = \sqrt[3]{\frac{1}{س} + \frac{٢}{س}} \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

$$\left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{س} - \frac{٢}{س} \right) \left(\frac{1}{س} + \frac{٢}{س} \right)} \right\}$$

(٤٣) أوجد ق(س) لكل من الاقترانات التالية:

$$(١) \text{ ق(س) } = (٢ - س^٣) \sqrt[3]{س(س + ١)} \quad \left\{ \frac{١٥}{٢} س \sqrt[3]{س + ١} \right\}$$

$$(٢) \text{ ق(س) } = ٢ س جتا س + (٢ - س^٢) جا س \quad \{س^٢ جتا س\}$$

$$(٣) \text{ ق(س) } = (س + ١)(س - ١)(س^٣ + ١)(س^٣ - ١) \quad \{س^٢ - ٢س^٣\}$$

إرشاد: استخدم قانون التوزيع

$$(٤٤) \text{ إذا كان ق(س) } = \frac{س}{س^٢ - ١} \text{ أوجد ق(١) غير موجودة}$$

$$(٤٥) \text{ إذا كان للاقتران ق(س) } = ١ س^٢ + ٦ س نقطة حرجة عند س = ١ فما قيمة$$

$$\text{الثابت أ} \quad \{٢ -\}$$

$$(٤٦) \text{ إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س ثلاثة شهرياً تعطى بالعلاقة ك(س) =}$$

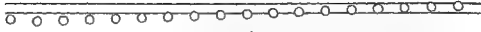
$$س^٢ - ٣س^٢ - ٨٠ س + ٥٠٠ \text{ وكان الإيراد الكلي الشهري يعطى بالعلاقة د}$$

$$\text{(س) } = ٢٨٠٠ س$$

فما عدد الثلاثجات التي ينتجها المصنع شهرياً ليحقق أكبر ربح

$$\{٣٢ \text{ ثلاثة}\}$$

$$\text{إرشاد: ر(س) = صفر}$$



(٤٧) أوجد ق (س) للاقتران ق (س) = $\frac{1}{س}$ س \neq صفر باستخدام التعريف

$$\left\{ \frac{1}{س} - \right\}$$

(٤٨) إذا كانت ص = ع^٢ + ع ، ع = س^٢ - ٥ أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\{ ١٢ س + ١ \}$$

(٤٩) إذا كانت ص^٢ = (س - ١)^٢ أوجد $\left| \frac{دص}{دس} \right|$ (١١، ١٢)

(٥٠) إذا كان ق (س) = قا^٢ س - ظا^٢ س أوجد ق (س) {صفر}

إرشاد: استعن بالتطابقة قا^٢ س = ظا^٢ س + ١

(٥١) إذا كان ص = (س^٢ - ٢) (٤ س + ١) أوجد $\left| \frac{دص}{دس} \right|$ {٢١ -}

(٥٢) إذا مر منحنى الاقتران ق (س) بالنقطتين أ (٨ ، ٦) ، ب (٢ ، ١٢) احسب متوسط

{١ -} التغير له

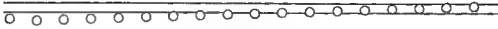
(٥٣) أوجد أصفار المشتقة الأولى للاقتران ق (س) = س^٣ - ٢٧ س + ١١ {٣ ±}

(٥٤) أوجد $\frac{د}{دس}$ (س^٢) ، $\frac{د}{دس}$ (ص^٢) ، $\frac{د}{دس}$ (٢π) ، $\frac{د}{دص}$ (ص^٢) ، $\frac{د}{دس}$ (٢π)

{٣س^٢ ، صفر ، صفر ، صفر ، ٢ص^٢ ، ٢π٣}

(٥٥) جد نقط الانعطاف وزاويته عند كل نقطة من نقطه لمنحنى الاقتران ق (س) =

س^٤ - ٤س^٣ ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، - ١٦) ، {ي = صفر ، ي = ظا^٢ - ١٦}



(٥٦) إذا كان ق (س) = جتا س + جتا س يبين أن ل ق (س) + ل ق (س) = ٢

(٥٧) إذا كان س^٤ + س^٣ ص + ص^٤ = صفر أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\left\{ \frac{-\frac{٢}{٢} س - \frac{٢}{٢} س}{\frac{٢}{٢} ص + \frac{٢}{٢} ص} \right\}$$

(٥٨) إذا كان جا ٣ ص - جتا ٢ س = صفر أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\left\{ \frac{-٢ جا ٢ ص}{٢ جتا ٢ ص} \right\}$$

(٥٩) أوجد النقط الواقعة على الدائرة س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = صفر والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور الصادات.

$$\{(٤ - , ٨), (٤ - , ٢ -)\}$$

إرشاد: م المماس الموازي لمحور الصادات = $\frac{١}{صفر}$

(٦٠) أوجد معادلات المماس والعمودي عليه للمنحنى س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ١٦ = صفر عند النقطة التي إحداثها السيني = ٤ والواقعة عليه.

$$\{٤ س - ١٦ = ص٣, ٤ س + ص٣ = ٢٤\}$$

$$\{١٢ = ص٣ + ٤ ص, ١٢ - ص٣ - ٤ ص = ١٢\}$$

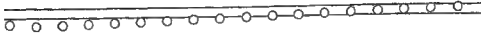
(٦١) إذا كانت ط^٢ = ص ، ط = س^٢ - س^٢ - ٥ أوجد $\frac{دص}{دس}$

$$\{٢ (س - س^٢ - ٥) (س - س^٢ - ٥)\}$$

إرشاد: استعن بقاعدة السلسلة

(٦٢) إذا كان ق (س) = (| س |)^٢





أوجد ق (٠)، ق (٠)، ق (٠) ، غير موجودة {٠، ٠، ٠}

إرشاد: أعد تعريف الاقتران ق (س) ليكون (س | س) = $\begin{cases} -س^2 & \text{س} > \text{صفر} \\ س^2 & \text{س} \leq \text{صفر} \end{cases}$

(٦٣) إذا كان ق (١) = ٢ ، ق (١) = ٣ ، هـ (١) = ٢ - ، هـ (١) = ١

أوجد (ق) (١) {٢ -}

(٦٤) إذا كان $\frac{ص}{س} = \frac{٥}{٢} = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ (٢، ١)

(٦٥) إذا كان ص = $\sqrt{١ + س}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ { $\frac{١}{\sqrt{١ + س}}$ }

(٦٦) إذا كان ص = ق (س) = ٢ - س - ١ أوجد $\frac{دص}{دس}$ | علماً بأن ق (٢) = ٥

{٢٠}

إرشاد: استعن بمشتقة الاقتران المركب

(٦٧) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س + ب س + ٩ س + ١ قيمة عظمى محلية

عند س = ١ وقيمة صفرى محلية عند س = ٣ أوجد قيمة كل من أ، ب

{١ - ، ٦}

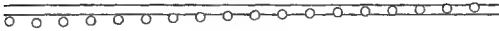
إرشاد: ق (س) = صفر عند العظمى والصفرى معاً

(٦٨) تتمدد كرة معدنية بالحرارة فيزداد حجمها بمقدار ٢,٥ سم^٣ / ث احسب كم

تزداد مساحة سطحها عندما يصبح نصف قطرها ١٠ سم

{ $\frac{١}{٢}$ سم^٣ / ث }





(٦٩) أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل من:

(١) $ص = س جا س$

(٢) $ص = س هـ س$

(٣) $ص = س لو س$

(٤) $ص = س جتا س$

(٥) $ص = س ظا س$

{استعن بشتقة حاصل ضرب افترائين}

(٧٠) إذا كان $ق(س) = أ س^٢$ وكانت $نها = \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ٦$ ما قيمة $أ$

{٣}

(٧١) إذا كان $جا ص = جا س$ أوجد $\frac{دص}{دس} \mid (\frac{\pi}{٢}, \frac{\pi}{٣})$

{ -١ }

(٧٢) ما قيمة $أ$ التي تجعل المستقيم $٤س - ص - أ = ٠$ صفر مماساً للمنحنى $ص =$

$\{ \frac{١٧}{٨} \}$ $٢س^٢ - س + ١$

(٧٣) إذا كان $ص = ظا س$ أوجد $\frac{دص}{دس} \mid \frac{\pi}{٣}$

{ $\frac{1}{٣}$ }

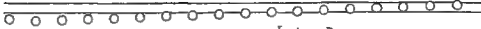
إرشاد: استعن بالاشتقاق الضمني

(٧٤) بدأ جسيم حركته من السكون في خط مستقيم بحيث أنه يقطع المسافة $ف$

بعد ٧ من الثواني بالقانون التالي $ف(٧) = ٨ - ٧٢$ أوجد المسافة التي

يقطعها عندما يكون تسارعه ٤ سم/ث^٢.

التفاضل وتطبيقاته



$$(٧٥) \text{ إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \frac{\text{جاس}^2}{\text{س}} , \text{ س} \neq \text{صفر} \\ \text{صفر} , \text{ س} = \text{صفر} \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصاله عند س = صفر {متصل}

إرشاد: اضرب البسط والمقام بـ س

(٧٦) بدأت سفينة حركتها شرقاً بسرعة ٢٠ ميل / الساعة وبعد ساعة انطلقت

سفينة أخرى من نفس المكان جنوباً بسرعة ٣٠ ميل / الساعة.

أوجد سرعة تباعدهما عن بعضهما البعض بعد ساعتين من انطلاق السفينة الثانية.

(٧٧) احسب مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودي عليه عند

نقطة التماس (- ١ ، ٨) للمنحنى $\text{ص} = ٩ - \text{س}^2$ {٨٠ وحدة مساحة}

إرشاد: استعمل ظا ي = م المماس

$$(٧٨) \text{ إذا كان ق (س) = } \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{\text{جاس} + ١} \text{ بين أن:}$$

$$\text{ق} \left(\frac{\pi}{4} \right) - ٣ = \text{ق} \left(\frac{\pi}{4} \right) = ٣$$

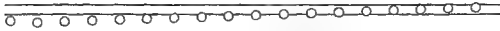
$$(٧٩) \text{ إذا كان ق (س) = } ٣\text{س}^4 - ١٠\text{س}^3 + ١٢\text{س}^2 - ٧$$

أوجد النقط الحرجة والقيم القصوى ونقط الانعطاف إن وجدت للاقتران.

$$(٨٠) \text{ إذا كانت ص} = ٥\text{س}^٥ \text{ أوجد } \{٥\text{س}^٥ \text{ لو } ٥\}$$

إرشاد: خذ لوغاريتم الطرفين ثم اشتق





(٨١) ما أقل قيمة للمتغير v إذا كان $v = 3s^2 - 2s + 1$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، $\left\{ \frac{2}{3} \right\}$

إرشاد: قيمة صغرى

(٨٢) أوجد $Q(s)$ للاقتران:

$$Q(s) = (s-1)\left(1 - \frac{1}{s}\right), \quad s \neq \text{صفر}$$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{s} \right\}$$

(٨٣) أوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران $Q(s) = 3s^2 - 2s + 1$

$$\{ [1, 1], (1, \infty), [-\infty, -1], (-1, 1] \}$$

(٨٤) إذا كانت $v = 5 - 3s$ ما قيمة Δv (التغير في v) عندما تتغير s من ٢

$$\text{إلى } 9$$

$$\{-9\}$$

(٨٥) إذا كان $Q(s) = 3s^2 - 2s + 1$ أوجد $Q'(s)$ بالتعريف

$$\{ 6s - 2 \}$$

(٨٦) إذا كان $Q(s) = 5s^2 - 2s + 7$ ما قيمة $Q'(1)$

$$\{ 26 \}$$

(٨٧) إذا كانت $v = \frac{1}{c}$ ، $c \neq \text{صفر}$ ، $c = \frac{1}{s}$ ، $s \neq \text{صفر}$ أوجد $\frac{dv}{ds}$

$$\{ 1 \}$$

(٨٨) ما قيمة s التي تجعل $Q'(s)$ (للاقتران $Q(s) = \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3}s^2 - 2s$

$$+ 1) \text{ تساوي صفرًا}$$

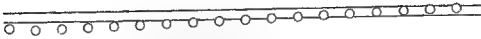
$$\left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

(٨٩) إذا كان $Q(s)$ قابل للاشتقاق وكان $Q'(s) = 1 + s$ أوجد $Q(9)$

$$\left\{ \frac{1}{12} \right\}$$

إرشاد: اشتقاق اقتران مركب

التفاضل وتطبيقاته



(٩٠) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $f(t) = 6t^2 - t^3$ حيث t الزمن بالثواني، f المسافة بالأمتار،

احسب المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يصبح تسارعه صفراً. {١٦ متر}

(٩١) إذا كان $v = 3t^2$ ، وكان $\frac{dv}{dt} = 12$ أوجد $\frac{dv}{dt}$ | $\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4}$ {١٦}

(٩٢) يُراد صنع صندوق مفتوح من أعلى من صفيحة مستطيلة من معدن ما ، طولها

٤٨سم وعرضها ٣٠سم وذلك بقص مربعات متساوية المساحة من زواياها الأربع

وثني الأجزاء البازئة للأعلى،



جد أكبر حجم للصندوق {٣٨٨٨سم^٣}

إرشاد: استعن بالشكل المرفق

(٩٣) بين أن المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين $v = 4t^2 + 5t$ ، $s = 4t^2 - 5t$

يكونان متعامدان عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول.

إرشاد: حل المعادلتين معاً لتجد نقطة التقاطع

(٩٤) أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ متر عن سطح الأرض حيث المسافة المقطوعة

بالأمتار بعد t ثانية هي $f(t) = 5t^2$ وفي نفس الوقت بالذات أطلق

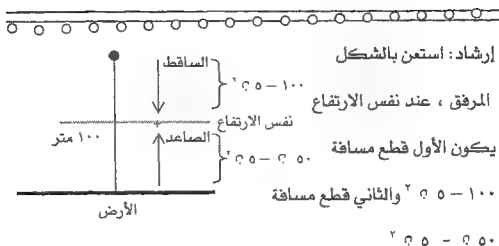
جسم آخر من سطح الأرض للأعلى حيث المسافة التي يقطعها هي $f(t) =$

$$50 - 5t^2$$

أوجد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح

الأرض {٢٠، ٣٠ م/ث}

التفاضل وتطبيقاته



(٩٥) إذا كان ق (س) = ١٢ س - س^٢ ، أوجد فترات التمعير لأسفل ولأعلى لمنحناء.

{لأسفل (٠ ، ٥٥) ، لأعلى (٥٥ ، ١٠)}

(٩٦) إذا كان ق (س) = ٢س^٢ + ١ ، هـ (س) = ٣ س أوجد (ق هـ) (س)

{٣٦ س}

إرشاد: يمكن تركيب الاقترانين ثم الاشتقاق

(٩٧) إذا كان ق (س) = س | جاس | ، س ∈ (٠ ، ١) π

{لا} هل الاقتران ق (س) قابل للاشتقاق عند س = π أم لا

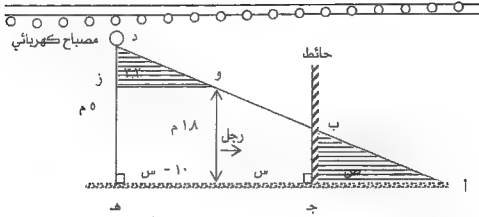
إرشاد: أعد تعريف الاقتران

(٩٨) إذا كان ق (س) = س (٢ - س) ، س ∈ (-١ ، ١) π

أوجد القيم القصوى المحلية وميزها إلى صغرى وعظمى.

(٩٩) يقع مصباح كهربائي على بعد ١٠ امتار من حائط رأسي وعلى ارتفاع ٥ متر

عن سطح ممر أفقي يعامد الحائط الرأسي.



سار رجل طوله ١,٨ متر على هذا الممر بسرعة $\frac{1}{٧}$ م/ث مبتعداً عن المصباح (كما في الشكل) جد سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط عندما يكون الرجل على بعد ١,٥ متر عن الحائط.

إرشاد: استعن بالشكل ثم استقد من تشابه المثلثين المظللين

$$(١٠٠) \text{ إذا كانت ص} = \frac{(١ + س + ٢س)}{٢(١ + ٢س)} \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

$$\left\{ \frac{(١ + س + ٢س)^٢ (٢س - ٢س٢ - ٤س + ٤)}{٢(١ + ٢س)} \right\} \text{ , إرشاد خذ لوغاريتم الطرفين}$$

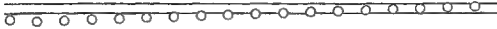
(١٠١) قذف جسيم رأسياً للأعلى وقطع مسافة ف متراً بزمناً قدره ثانية حسب العلاقة $ف(٩) = -٤٩٠ + ٩٠ + ٢٨٠ + ٩٠٠$ متى يصل الجسم أقصى ارتفاع له. $\left\{ \frac{٤}{٤٩} \text{ ثانية} \right\}$

إرشاد: السرعة = صفر

$$(١٠٢) \text{ إذا كان ق(س) = } ٢س - ١ \text{ أوجد ق'(س)}$$

(١٠٣) الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) في الفترة $[-٢, ٤]$ اعتماداً عليه أجب عما يلي:

$$(١) \text{ ما الإحداثي السيني للنقط الحرجة لمنحنى ق(س) } \{-٢, ١\}$$



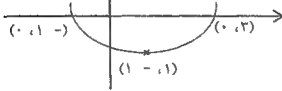
ق ق = ق (س)

(٢) ما الإحداثي السيني لنقط

الانعطاف للاقتزان ق (س) {١}

(٣) أكتب اقتزان التناقص

للاقتزان ق (س) { (٣ ، ١ -) }



$$(١٠٤) \text{ بيّن أن الاقتزان ق (س) } = \left. \begin{array}{l} ٢ + ٣ \text{ س} \leq ٠ \text{ ،} \\ ٢ \text{ س} > ١ + ٣ \text{ س} \end{array} \right\}$$

متصل عند س = صفر لكنه غير قابل للاشتقاق عند س = صفر بالذات.

(١٠٥) إذا كان ص = هـ (س) وكان هـ (١) - = ٢ ، هـ (١) = ٢

{٢٤ -}

أوجد $\frac{دص}{دس} \bigg|_{س=١}$

{٣}

(١٠٦) إذا كان ق (س) = س^٢ - ٣ | أوجد ق (١)

(١٠٧) أوجد مجالات تزايد وتناقص الاقتزان:

$$\text{ق (س) } = \left. \begin{array}{l} ٣ \leq ٢ \text{ س} + ١ \text{ ،} \\ ٢ \text{ س} > ٣ - ٤ \end{array} \right\}$$

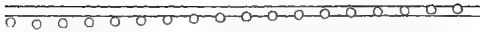
{٣} متزايد ، {٣ ، ∞) متناقص

(١٠٨) أكتب قاعدة الاقتزان كثير الحدود من الدرجة الثالثة الذي:

له قيمة عظمى محلية = ٢ عندما س = - ١

وله قيمة صغرى محلية = - ١ عندما س = ١

{ $\frac{٣}{٤}$ س - $\frac{٩}{٤}$ س^٢ - $\frac{١}{٧}$ س } ، إرشاد: الاقتزان يمر بالنقطة (١ ، - ١) ، (٢ ، ١)



(١٠٩) ما أكبر قيمة للاقتزان (عظمى مطلقة) ق (س) = س - س^٢ في الفترة [٢، ٤] ؟

$$\{-2\}$$

وما أصغر قيمة للاقتزان (صغرى مطلقة) هـ (س) = $\frac{س^٢}{١+س}$ ؟ {صفر}

(١١٠) أوجد النقط الحرجة لكل من الاقتزانات التالية إن وجدت:

$$(١) \text{ ق، (س) } = \frac{١}{٣} س - \frac{١}{٣} س^٢ - ٢س + ٥ \quad \{\text{عندما س} = ٢, -1\}$$

$$(٢) \text{ ق، (س) } = \sqrt{٩ - س^٢} \quad \{ \text{عندما س} = ٢ \}$$

$$(٣) \text{ ق، (س) } = \text{أ حيث أ ثابت} \quad \{\text{لكل س} \in \mathbb{R}\}$$

$$(٤) \text{ ق، (س) } = [٢ + س] \quad \{\text{لكل س} \in \mathbb{R}\}$$

$$(٥) \text{ ق، (س) } = \begin{cases} ١ - س^٢ & ١ \geq س > ٠ \\ ١ - س^٢ & ١ \geq س \geq ٥ \end{cases} \quad \{-1, ٠, ١, ٥\}$$

$$(١١١) \text{ إذا كانت (٢، -١) نقطة حرجة للاقتزان ق (س) } = \frac{س + ب}{(١ - س)(١ - س)}$$

أوجد قيمة كل من أ ، ب {٠، ١}

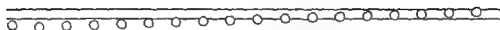
إرشاد: الاقتزان يمر بالنقطة (٢، -١) أيضاً

(١١٢) عين نقط الانعطاف لكل اقتزان من الاقتزانات التالية إن وجدت:

$$(١) \text{ ق، (س) } = ٨س - س^٢ \quad \left\{ \left(\frac{٨}{٩}, \frac{٢}{٣} \right), \left(\frac{٨}{٩}, \frac{٢}{٣} \right) \right\}$$

$$(٢) \text{ ق، (س) } = ٤س - ٤س^٢ + ٦س^٣ + ٥ \quad \{\text{لا يوجد}\}$$

$$(٣) \text{ ق، (س) } = جا س^٢ \quad \left\{ \left(\frac{١}{٣}, \frac{\pi^٢}{٤} \right), \left(\frac{١}{٤}, \frac{\pi}{٤} \right) \right\}$$



(١١٣) ما مقياس زاوية الانعطاف للافتران

$$\{٧٩\} \quad \text{ق (س)} = \text{س}^2 - \text{س}^2 + ٧ \text{ س} + ٥ \text{ لأقرب درجة}$$

$$(١١٤) \text{ إذا كان هـ } (٢) = ٥, \text{ هـ } (٢) = ٤$$

$$\text{ق (٢)} = ١, \text{ ق } (٢) = ٢$$

$$\text{ق (٥)} = ٨, \text{ ق } (٥) = ٧$$

$$\text{أوجد (١) ق (هـ}^٠ \text{ (٢)) , (٢) ق (هـ}^٠ \text{ (٢))}$$

$$(٣) \text{ ق (هـ}^٠ \text{ (٢))} - (٤) \text{ ق (هـ}^٠ \text{ (٢))}$$

$$\{٢٨, ٧, ١٩, -١١\}$$

(١١٥) أوجد مجالات تقعر كل من الافتران التالية وميزه لأعلى أو لأسفل.

$$(١) \text{ ق (س)} = |٩ - \text{س}^٢| \text{ على الفترة } [-٥, ٥] \text{ لأعلى } [-٥, ٣], [٣, ٥]$$

$$(٢) \text{ ق (س)} = \text{جاس على الفترة } [٠, \pi] \text{ لأعلى } [\pi, ٢\pi] \text{ للأسفل } [٠, \pi]$$

$$(٣) \text{ ق (س)} = \sqrt{\text{س}} \text{ على الفترة } [-\infty, ٠] \text{ لأعلى } [٠, \infty] \text{ للأسفل } [٠, \infty]$$

$$(١١٦) \text{ إذا كان ق (س)} = \text{لو} \text{ (س}^٢ + \text{س}^٢) \text{ } \frac{١}{٣} \text{ أوجد ق (س)} \left\{ \frac{١ + \text{س}^٢}{(\text{س}^٢ + \text{س}^٢)} \right\}$$

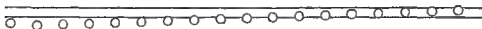
$$(١١٧) \text{ إذا كان ق (س)} = \text{س}^٢ - \text{س}^٢ + ٩ \text{ س} - ١٤ \text{ أوجد مجالات تزايد وتناقصه}$$

{متزايد على ح}

$$(١١٨) \text{ أوجد } \frac{\text{دس}}{\text{دس}} \text{ لكل من:}$$



التفاضل وتطبيقاته



$$(1) \text{ ص} = (2\text{س} + 1)^2, \quad (2) \text{ ص} = \text{جا} (2\text{س} + 1)$$

$$(3) \text{ ص} = \text{لو} (2\text{س}), \text{ س} < 0, \quad (4) \text{ ص} = (\text{هـ}) 2\text{س} + 1$$

$$(119) \text{ إذا كان ق (س) } = \frac{\text{هـ}^2}{1 + \text{هـ}^2} \text{ أوجد ق (س)} \quad \left\{ \frac{\text{هـ}^2 + 2\text{هـ}^2}{1 + \text{هـ}^2} \right\}$$

$$(120) \text{ إذا كان ص} = \text{جتا (س + 1) أوجد } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \quad \{- \text{ص}\}$$

$$(121) \text{ إذا كان ق (س) } = \sqrt{1 + \text{س}} \text{ أوجد ق (9)} \quad \left\{ \frac{1}{24} \right\}$$

$$(122) \text{ إذا كان س ص (س + ص) = 6 أوجد ميل المماس عند (1, 2)} \quad \left\{ \frac{8}{5} \right\}$$

$$(123) \text{ إذا كان جا ص} = \text{جا} 2\text{س أوجد } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \quad \left\{ \frac{2 \text{جتا} 2\text{س}}{\text{جتا ص}} \right\}$$

$$(124) \text{ إذا كان جاس} = \text{جتاس أوجد } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \quad \left\{ 1 \right\} \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$$

$$(125) \text{ أوجد أصغر قيمة للاقتران ق (س) } = |3 - \text{س}| - 5 \quad \{-5\}$$

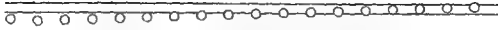
إرشاد: صفري مطلقة

$$(126) \text{ أوجد النقط الحرجة للاقتران ق (س) } = \frac{1 - \text{س}^2}{3 + \text{س}} \quad \left\{ 2 - , \frac{1}{2} \right\}$$

$$(127) \text{ أوجد القيم القصوى للاقتران ق (س) } = \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2, \text{س} \leq 2 \\ -\text{س}^2, \text{س} > 2 \end{array} \right\} \quad \{-\text{عظمى} - 4\}$$

$$(128) \text{ إذا علمت أن للاقتران ص} = \text{ق (س) نقطة انعطاف عند س} = 2 \text{ وأن ق (2) = 8}$$

$$\text{ق (2) = -3, ق (2) = صفر أوجد ظل زاوية الانعطاف} \quad \{-3\}$$



(١٢٩) ما مجال تقعر الاقتران ق (س) = س^٢ - س^٣ + س^٢ للأسفل $\{(-\infty, 1)\}$

(١٣٠) ما مجال تناقص الاقتران ق (س) = س^٢ ، س $\in [-4, 4]$ $\{(0, 4)\}$

(١٣١) ما مجال تزايد الاقتران ق (س) = جتا س ، س $\in [\pi/2, \pi]$ $\{(\pi/2, \pi)\}$

(١٣٢) إذا كان للاقتران ق (س) = ل س - س^٢ قيمة عظمى محلية عند س = ٣ ما

قيمة ل $\{6\}$

(١٣٣) إذا كان للاقتران ق (س) = أ س^٢ + ب س^٢ + ج س + ٥ نقطة انعطاف أفقي

عند (١, ١) أوجد قاعدة الاقتران ق (س) = - س^٤ + س^٢ + ١٢ س^٢ - ١٣ س + ٥

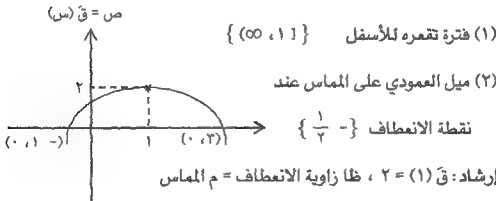
إرشاد: ق (١) = صفر ، ق (١) = صفر، ق (١) = ١ كون الاقتران يمر بها

(١٣٤) إذا كانت النقطة (٥, ٣) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق (س) وكان

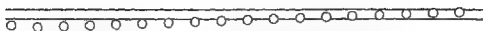
ق (٥) = ١ أوجد قياس زاوية الانعطاف بالدرجات للاقتران عندما س = ٥

$\{45^\circ\}$

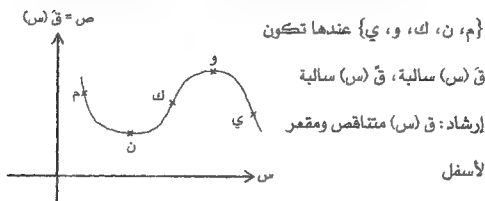
(١٣٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق (س) أوجد:



التفاضل وتطبيقاته



(١٣٦) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى q (س) أي من النقاط



(١٣٧) إذا كان $v = h$ فاس أوجد $\frac{dv}{ds}$

{قاس فاس هـ قاس}

(١٣٨) إذا كان $v = h$ فاس أوجد $\frac{dv}{ds}$

{هـ س، هـ س + هـ س، لو س}

(١٣٩) إذا كان q (س) = $لو_s (س^2 + 1)$ فما قيمة $q'(1)$

{١}

(١٤٠) إذا كان $v = ٢س^٢$ فما قيمة $\frac{dv}{ds}$ | $\frac{1}{٣} = س$

{٢ لو_s}

(١٤١) ما العددان الحقيقيان الموجبان اللذان:

(١) مجموعهما ٥٠ وحاصل ضربيهما أكبر ما يمكن

{٢٠}

(٢) مجموعهما ٤٠ ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن

{٢٠، ٢٠}

(٣) مجموعهما ٣٠ وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن

{١٠، ٢٠}

(١٤٢) ما إحداثيات النقطة التي تقع على منحنى الاقتران $v = \sqrt{١٠ + س^٢ + ٦س}$

{(٠، ١)، (٥، -)}

وأقرب ما تكون إلى النقطة (١، ٠)



التفاضل وتطبيقاته

(١٤٣) مثلث أطوال أضلاعه كما في الشكل
ما قيمة s التي تجعل مساحته أكبر
ما يمكن

{ ١٠ سم }

إرشاد: أوجد قيمة s أولاً ثم أوجد مساحة المثلث ثانياً

(١٤٤) إذا كان $q(s) = |s - 1| - |s|$ أوجد $q'(0)$ {غير موجودة}

(١٤٥) إذا كان $g(s) = \sin(s)$ أوجد $\frac{dg}{ds}$ (٠, $\frac{\pi}{2}$) {صفر}

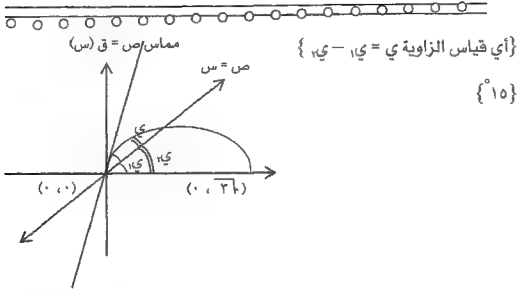
(١٤٦) إذا كانت المقاومة الكلية لمقاومتين موصولتين على التوازي M ، m تعطى بالعلاقة $\frac{1}{M} + \frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ وكانت M تزداد بمعدل ١ أوم/ث و m تزداد بمعدل ١.٥ أوم/ثانية، جد معدل الزيادة في المقاومة M علماً بأن $M = ٥٠$ ، $m = ٧٥$ أوم
{ ٠.٦ أوم/ث }

(١٤٧) إذا كان $q(s) = s^3 + s^2$ وكانت نها $q(s) - q(1) = ٧$ فما قيمة s
{ ٢ }

(١٤٨) إذا كان $q(s) = s^2$ و كان $q'(1) = ٣$ أوجد $\frac{dq}{ds}$ (١) { $\frac{1}{2}$ }

إرشاد: مشتقة الاقتران المركب

(١٤٩) من الشكل المجاور أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم $ص = س$ ومماس منحنى الاقتران $q(s) = \sqrt{s^3 - s}$ عند $(0, 0)$.



(١٥٠) قذفت كرة رأسياً للأعلى من قمة برج فإذا كانت المسافة المقطوعة تتعيم

بالمعادلة $f(t) = -4.9t^2 + 16t$ حيث f المسافة بالأمتار، t

الزمن بالثواني، احسب ارتفاع البرج وسرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض

{ ١٦٠ متراً، - ١١٢ م/ث }

إرشاد: لإيجاد ارتفاع البرج $t = 0$ ، ولإيجاد السرعة لحظة الاصطدام

بالأرض $f = 0$

(١٥١) s ص، s ع طريقان متعامدان في s ، s ص = ٩٠٠ متر، s ع = ٧٠٠ متر

، بدأ رجلان الحركة معاً في نفس الوقت وسارا باتجاه s ، الأرض من s

وبسرعة ٦٠ متر/دقيقة والثاني من s وبسرعة ٨٠ متر/دقيقة.

أوجد معدل التغير في مساحة المثلث الناتج من حركتها مع النقطة s بعد ٨

{ ١٨٦٠٠ م^٢ / دقيقة }

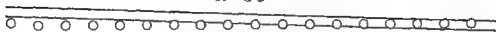
دقائق من بداية الحركة

إرشاد: يمكن أن يكون الحل بدلالة الزمن t فقط

{ $\frac{1}{s}$ }

$\frac{ds}{ds}$

(١٥٢) إذا كان $h = s$ حيث h العدد النايبييري أوجد



(١٥٣) إذا كان $ص$ هـ، $أ$ ح ما قيمة $أ$ ليكون $ص - ص - ص = ص$ صفر

{٣}

{ $\frac{٨}{٢}$ }

(١٥٤) إذا كان $ق$ (س) = $لوم$ ($\frac{س}{١+س}$) أوجد $ق$ (١)

(١٥٥) أوجد ميل المماس إزاء كل نقطة للاقتارين

{صفر}

(١) $ق$ (س) = $١ - [٢س]$ ، $س = ١,٢٥$

{صفر}

(٢) $ق$ (س) = $(١ - س)$ ، $س = ٠,٥$

(١٥٦) إذا كان $ف = ٧ - ٢٠ + ٧٠ + ١٢٠$ احسب المسافة $ف$ عندما تنعدم السرعة $ع$

{٢٠ كم}

(١٥٧) أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $س + ص + ٢ = ١٢$

{ $ق$ (١)}

(١٥٨) احسب نها $\frac{ظا (١ + \frac{\pi}{٤}) - ١}{١ - س}$

إرشاد: استبدل ١ بظا $\frac{\pi}{٤}$ يصبح الاقتران النسبي تعريف المشتقة الأولى

(١٥٩) احسب نها $\frac{ق (٢ + ٧) - ق (٢ + ٣)}{٤ - ٣}$

إرشاد: بإضافة $ق$ (٢) للبسط ثم طرحها منه يصبح الاقتران النسبي تعريف المشتقة الأولى.

(١٦٠) إناء مخروط الشكل نصف قطر قاعدته ٥ سم وارتفاعه ١٢ سم ورأسه

للأسفل يخرج منه الماء بمعدل $\frac{1}{2}$ قدم^٢ / ث ويصب في وعاء آخر أسطواني الشكل نصف قطر قاعدته ٢ سم فإذا علمت أن ارتفاع الماء بالمخروط = ارتفاع الماء بالإسطوانة.

أوجد معدل تناقص الماء في المخروط

إرشاد: $\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dt}$ حيث H حجم الماء بالمخروط، H حجم الماء بالإسطوانة

(١٦١) نقطتان ماديتان تحركتا من نقطة الأصل، الأولى على المنحنى $y = x^2$ والثانية باتجاه محور السينات السالب.

أوجد أقرب مسافة فيها عندما $x = 2$

(١٦٢) أكتب معادلة المماس للمنحنى $y = x^2 + x + 2$ المرسوم من النقطة الخارجة عنه $(-2, 0)$

إرشاد: نجد أولاً نقطة التماس (x, y) من ميل المماس = ميل المنحنى وهنا $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

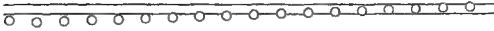
(١٦٣) أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الاقتارات التالية:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x$$

(١٦٤) إذا كان $y = x^2$ ، $\frac{dy}{dx} = 2x$ أوجد نها $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$

(١٦٥) إذا كان منحنى $y = x^2$ يمر بالنقطة $(1, 1)$ وكان متوسط تغيره من $x = 1$ إلى $x = 3$ هو $\frac{dy}{dx}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

التفاضل وتطبيقاته



$$(166) \text{ إذا كان ق (س) = س}^3 + 2\text{س}^2 + 1$$

$$\{2\} \text{ وكانت نها } \frac{\text{ق}(-2+1) - \text{ق}(-1)}{-2-(-1)} = -2 \text{ ما قيمة أ}$$

$$(167) \text{ إذا امكن ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{أ} \text{ س}^3 + 5\text{س}^2 + 1 \\ \text{ب} \text{ س}^3 + 2\text{س}^2 \end{array} \right\} \text{ قابل للاشتقاق عند س = 2}$$

$$\{17, \frac{21}{2}\} \text{ أوجد قيمة كل من أ، ب}$$

إرشاد: متصل والمشتقة موجودة عند س = 2

$$(168) \text{ إذا كان ق (س) = هـ س}^3 + 1 \text{ وكان هـ}^2 = 3 \text{ ، هـ}^3 = 2 \text{ ، هـ}^4 = 2$$

$$\{-1\} \text{ أوجد ق}^2(2)$$

إرشاد: استعمل الفرض

$$(169) \text{ أوجد أصفار ق}^2(س) \text{ عندما ق (س) = } \frac{\text{س}}{1+\text{س}^2}$$

$$(170) \text{ أوجد } \frac{\text{د}}{\text{دس}} \left(\frac{\text{ق(س)}}{\text{س}} \right) \text{ عندما س = 5 ، ق(5) = 10 ، ق}^2(5) = 2 \text{ {صفر}}$$

$$(171) \text{ إذا كان ق (س) = } \frac{\text{ج}}{\text{هـ(س)}} \text{ وكان ق}^2(2) = 6 \text{ ، هـ}^2(2) = 3 \text{ ، هـ}^3(2) = 1$$

$$\{-2\} \text{ أوجد قيمة ج}$$

$$(172) \text{ إذا كان ق (س) = |س}^2 - 4| \text{ أوجد قيم س التي تجعل ق (س) عندها غير}$$

$$\{-2, 2\} \text{ قابل للاشتقاق}$$

$$(173) \text{ إذا كان ص = } \sqrt{\text{أ} \text{ س}^2 - 2\text{س} + 3} \text{ أوجد قيم س حيث } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

$$\{1\}$$



(١٧٤) إذا كانت v (السرعة) $\overline{[f]}$ (المسافة) احسب التسارع $\{18 \text{ م/ث}^2\}$

(١٧٥) إذا كانت $f = \frac{1}{y} = 2 - 3y + 5y^2$

احسب السرعة عندما يتعدم التسارع $\{-4 \text{ م/ث}\}$

(١٧٦) أوجد

(١) $\overline{[f]}$ (١) عندما q (س) $\overline{[s]} = [1 + 2s]$ {غير موجودة}

(٢) $\overline{[f]}$ (٢) عندما q (س) $\overline{[s]} = [1 + \frac{1}{y}]$ {٣}

(٣) $\overline{[f]}$ (٦٤) عندما q (س) $\overline{[s]} = [s^2 + s]$ $\{\frac{1}{12}\}$

(٤) $\overline{[f]}$ (١) عندما q (س) $\overline{[s]} = [1 + \frac{1}{y}] + 4$ {غير موجودة}

(٥) $\overline{[f]}$ (٤) عندما q (س) $\overline{[s]} = \frac{[4-s]}{s-4}$ {غير موجودة}

إرشاد: q (س) غير متصل

(١٧٧) ما مجموعة قيم s التي تكون المشتقة الأولى عندها غير موجودة في كل من

الاقتراين

(١) q (س) $\left. \begin{aligned} & 1 \leq s \leq 2, \quad \frac{2}{s} \\ & 2 > s > 5, \quad [1 - s] \end{aligned} \right\} =$ $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(١) q (س) $\left. \begin{aligned} & 1 > s \geq 0, \quad 1 + 2s \\ & 2 > s \geq 1, \quad [2s] \\ & 4 > s \geq 2, \quad s \end{aligned} \right\} =$ $\{0, 1, \frac{2}{3}, 2, 4\}$

(١٧٨) ما إحداثيات النقطة الواقعة على q (س) $s = 5 + 3$ والتي عندها

يكون العمودي على المماس موازياً للمستقيم هي $\frac{1}{y} + s = \frac{1}{y} \{(-1, 1)\}$

(١٧٩) إذا كان ق (س) = $s^2 + ٢س + ٣$ - يقطع محور الصادات في (٠، ٣) وله مماسات؛ الأول عند س = - ١ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والثاني عند س = ٢ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات أكتب قاعدة الاقتران.

$$\{ق(س) = -\frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3}s + 3\}$$

(١٨٠) إذا كان ق (س) = $s^2 - أس - (١ - أ)$ ، ما قيمة أ التي تجعل محور السينات مماساً لمنحناه

{ق (س) = صفر ، أ = ٢}

(١٨١) إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق (س) عند (٣، ٢) هي

$$٢ص + ٥س = ١٩ \text{ عندما } ٣ = ٢ \text{ أوجد ق (٢)}$$

(١٨٢) إذا كانت ص = $٣س - ٥$ معادلة المماس للمنحنى ق (س) عند س = ٢ وكانت ص = $٢س + ١$ معادلة العمودي على المماس عند تلك النقطة ما قيمة ل

{ $\frac{٥}{3}$ }

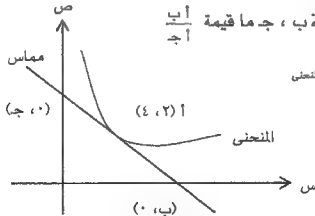
$$\text{إرشاد: } م \text{ المماس } \times م \text{ العمودي} = - ١$$

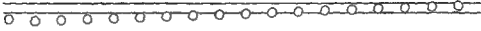
(١٨٣) اعتماداً على الشكل فإمّا كان المماس المرسوم للاقتران س ص = ٨ عند

(٢، ٤) يقطع المحورين في ب ، ج ما قيمة $\frac{ب}{ج}$

{ ١ }

$$\text{إرشاد: } م \text{ أب } \times م \text{ ب ج} = م \text{ المنحنى}$$





(١٨٤) إذا كان:

$$(١) \text{ ق (س) = } ٢ \text{ ق}^٢ \text{ س}^٢ \text{ أوجد ق' (س)}$$

$$(٢) \text{ ق (س) = } ٢ \text{ قتا س أوجد ق' (} \frac{\pi}{١} \text{)}$$

$$(٣) \text{ ق (س) = س + جتا } ٢ \text{ س أوجد ق' (} \frac{\pi}{٤} \text{)}$$

$$(٤) \text{ ق (س) = جا }^٢ \text{ س} + \text{جتا }^٢ \text{ س أوجد ق' (س)}$$

$$(٥) \text{ ق (س) = } ٣ \text{ جا } \frac{\pi^٢}{٣} \text{ أوجد ق' (س)}$$

$$(٦) \text{ ق (س) = أ هـ }^٢ \text{ جاس + ب هـ }^٢ \text{ جتاس أوجد ق' (س)}$$

$$\{ (١ - ب) \text{ هـ }^٢ \text{ جاس} + (١ + ب) \text{ هـ }^٢ \text{ جتاس} \}$$

(١٨٥) إذا كانت أو كان:

$$(١) \text{ ص = قاس بين أن } \frac{دص}{دس} = ص^٢ + ص \text{ ظا س}$$

$$(٢) \text{ ص = س جتا } ٣ \text{ ص بين أن } \frac{دص}{دس} + ٩ + \frac{دص}{دس} = ١٨ \text{ ص = صفر}$$

$$(٣) \text{ ص = ظا س} + \frac{١}{٣} \text{ ظا س بين أن } \frac{دص}{دس} = \text{قاس}$$

$$(٤) \text{ ص = جاس (١ + جتاس) بين أن } \frac{دص}{دس} = - \text{جاس} - ٢ \text{ جا } ٢ \text{ س}$$

$$(٥) \text{ ص = جا }^٢ \text{ س بين أن } \frac{دص}{دس} + ١٦ \text{ ص} = ١٢ \text{ جا }^٢ \text{ س}$$

$$(٦) \text{ ص = (ظاس + قاس) بين أن } \frac{دص}{دس} = \text{قاس}$$

$$(٧) \text{ جتا (س + ص) = س + ص بين أن } \frac{دص}{دس} = ١ -$$

التفاضل وتطبيقاته

$$\frac{1}{s} = \text{هـ (س)} \quad \frac{1}{s} = \text{بين أن (ق هـ) (س)} = \frac{1}{s} \quad \frac{1}{s} = \text{ق (س)} = s - 1, \text{ هـ (س)} = \frac{1}{s}$$

$$(9) \text{ ق (جاس) = جتاس بين أن ق (} \frac{1}{s} \text{) = (} \frac{1}{s} \text{) عندما } s \geq 0 \text{ } \frac{1}{s} > \frac{\pi}{4}$$

إرشاد: ق (جاس) اقتران مركب

$$(186) \text{ إذا كانت ص = جتا (جتاس) أوجد } \frac{d}{ds} \text{ جاس جا (جتاس)}$$

إرشاد: اقتران مركب

$$(187) \text{ إذا كان ص}^4 + \text{ص}^3 + \text{ص}^2 = 5 \text{ أوجد } \frac{d}{ds}$$

$$\{4\} \text{ أوجد قيمة س التي تجعل } \frac{d}{ds} = \text{صفر}$$

$$(188) \text{ إذا كان س + ص = س بين أن ص}^2 = \frac{d}{ds}$$

$$(189) \text{ إذا كان ق (} 2 \text{) = } 6 \text{ ، ق (} 2 \text{) = } 2 \text{ أوجد (} \frac{1}{s} \text{) (} 2 \text{) } \{ \frac{1}{s} \}$$

(190) ألقي حجر في بحيرة فبسبب أمواج دائرية متحدة بالمركز هو مركزها ، أنصاف أقطارها تزداد بمعدل ٠,٥ م / ث. جد معدل تغير محيط هذه الدوائر $\{ \pi \text{ م} \}$

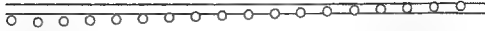
(191) بالون كروي يزداد حجمه بمعدل ٣ قدم^٣ / ث أوجد الزيادة في نصف قطره عندما يكون نصف قطره ١,٥ قدم $\{ \frac{1}{\pi 40} \}$

$$(192) \text{ بين أن للاقتران ص = جاس (1 + جتاس) قيمة عظمى محلية عند س = } \frac{\pi}{3}$$

$$(193) \text{ إذا كان ق (س) = س}^2 \text{ ، هـ (} 2 \text{) = } 3 \text{ ، هـ (} 2 \text{) = } 2 \text{ ، هـ (} 2 \text{) = } 0$$

$$\{180\} \text{ أوجد ق (هـ) (} 2 \text{)}$$

$$234 \text{ } \frac{1}{s} = \text{هـ (س)} \quad \frac{1}{s} = \text{بين أن (ق هـ) (س)} = \frac{1}{s} \quad \frac{1}{s} = \text{ق (س)} = s - 1, \text{ هـ (س)} = \frac{1}{s}$$



إرشاد: (ق ° هـ) ' (٢) = [(ق ° هـ) ' (٢) × (٢) هـ ' (٢)] ثم استخدم

مشتقة حاصل ضرب اثنائين

(١٩٤) سلم طوله ٢٠ مترا يرتكز على حائط رأسي، فإذا انزلق طرفه السفلي

مبتعداً عن الحائط على أرض أفقية بسرعة ٢ متر/ ث فبأي سرعة ينخفض

طرفه العلوي عندما يكون ارتفاع رأس السلم عن الأرض ٨ متر؟

(١٩٥) أكتب مجالات تقعر الاقتران (للأسفل وللأعلى) ق (س) = س^٥ - س^٣ على

شكل هترات.

$$(١٩٦) \text{ إذا كانت ص} = \sqrt{س + س + س + س} \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

(١٩٧) أوجد جميع المشتقات غير الصفريية التي لا تؤول إلى الصفر للاقتران

$$ق (س) = س^٦ - ٢س^٢ - ٢$$

(١٩٨) إذا كانت ع = ٢٢ - $\frac{٢}{٢}$ س معادلة السعر - الطلب على سلعة ينتجها مصنع

ماء، وكان اقتران التكلفة لك (س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٢س + ٤، جد عدد

الوحدات (س) المطلوب إنتاجها حتى يكون الربح أكبر ما يمكن.

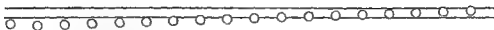
$$(١٩٩) \text{ إذا كانت ص} = \sqrt{ع} ، ع = \sqrt{س} \text{ أوجد } \frac{دص}{دس}$$

(٢٠٠) باستخدام التعريف أوجد ق' (س) عندما ق (س) = س^٢ + س^٢ + س

(٢٠١) إذا كان ق (س) = ٢س^٣ + ١ أوجد

(١) ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١)) ، (٢، ق(٢))





(٢) متوسط التغير عندما s تتغير من ١ إلى ٢ ، ماذا تستنتج ؟؟

$$(٢٠٢) \text{ إذا كان } q(s) = \frac{1}{2}s^4 - s^3 + 3s^2 - s^2, \text{ هـ } (s) = \frac{1}{2}(s - 1)^4 \\ \text{ وكانت } q'(s) = \text{ هـ } (s) \text{ جد قيمة الثابت جـ .}$$

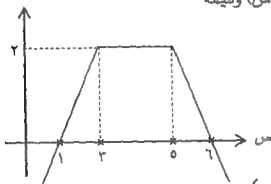
$$(٢٠٣) \text{ اكتب معادلة المماس للاقتزان } q(s) = 5s^2 - 2s \text{ عند النقطة } (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \\ \{ \frac{1}{5} = s \}$$

$$(٢٠٤) \text{ اكتب معادلة المماس للمنحنى } q(s) = \frac{1}{s}, \text{ س } \neq 0 \text{ عند النقطة } (5, \frac{1}{5}) \\ \{ \frac{2}{5} + s = \frac{1}{50} = s \}$$

$$(٢٠٥) \text{ إذا كان } s = 2 + \sqrt{s} \text{ أوجد } \frac{ds}{ds} \Big|_{s=1} = 1$$

$$(٢٠٦) \text{ إذا كان } s = 1 + s + 2s \text{ أوجد } \frac{ds}{ds} \Big|_{(1,1)}$$

$s = q'(s)$



(٢٠٧) يمثل الشكل المجاور منحنى $q(s)$ وقيمة

$$q'(3) = q'(5) = 2$$

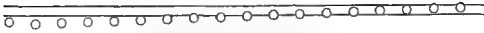
$$q'(1) = q'(6) = \text{ صفر}$$

بالاعتماد عليه أوجد

(١) قيم s الحرجة للاقتزان $q(s)$

(٢) فترات التزايد والتناقص للاقتزان $q(s)$

(٣) فقط القيم القصوى للاقتزان $q(s)$ ونوعها.



(٢٠٨) قطعة أرض مستقيمة الشكل مساحتها ٨٠٠ م^٢ تقع على ضفة نهر مستقيم، إذا أراد مالكها نسيجها ولم ينسج الواجهة الواقعة على ضفة النهر، أوجد أبعادها ليكون طول السياج اقصر ما يمكن. { ٢٠ ، ٤٠ }

(٢٠٩) إذا كان:

$$(١) \text{ ق (س) = (س}^٢ - \text{س}^٢) \text{ أوجد ق (٣)}$$

$$(٢) \text{ ق (س) = } \sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}} \text{ أوجد ق (٦٤)}$$

$$(٣) \text{ ق (س) = } ٢\text{س} \text{ أوجد ق (} \frac{\pi}{١} \text{)}$$

(٢١٠) تتحرك نقطة على مسار مستقيم معادلتها س + ٢ ص = ٢ ، أوجد معدل تغير إحداثها الصادي إذا كان إحداثها السيني يزداد بمعدل ٤ وحدة/ث.

$$(٢١١) \text{ أوجد } \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} \text{ لكل من:}$$

$$\text{ص = حاس ، ص = جتاس}$$

$$(٢١٢) \text{ أوجد } \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} \text{ لكل من:}$$

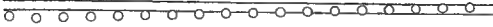
$$(١) \text{ ص = } \frac{١ + \text{س}^٢}{١ - \text{س}^٢} ، \text{ س} \neq ١$$

$$(٢) \text{ ص = (س}^٢ + ١) (١ - \text{س}^٢)$$

$$(٣) \text{ ص = (س}^٢ + ١) + (١ - \text{س}^٢)$$

$$(٤) \text{ ص = (س}^٢ + ١) - (١ - \text{س}^٢)$$

$$(٢١٣) \text{ إذا كان ق (س) = س}^٢ + ٢\text{س ، هـ (س) = س}^٣$$



أوجد $(ق \circ هـ)^{-1}$ ، $(ق \circ هـ)^{-1}$

إرشاد: التركيب أولاً ثم الاشتقاق

(٢١٤) أوجد $ق(س)$ لكل من الاقترانان:

$$(١) ق(س) = \frac{1}{5}س^0 - \frac{1}{4}س^1 + \frac{1}{3}س^2 - \frac{1}{2}س^3 + س^4$$

$$(٢) ق(س) = (س - ١)(س + ٢)(س - ٣)(س + ٥)$$

إرشاد: اجعل الطرف الأيسر هوسين فقط

$$(٣) ق(س) = (س + ٤)(س + ٢)(س + ١)$$

$$(٤) ق(س) = \frac{س + ١}{س + ٣} ، س \neq ٣$$

$$(٥) ق(س) = جا(س + ٢)$$

(٢١٥) إذا كان $ق(س) = ٣س + ٢$ وكان $ق(١) = ١$ ما قيمة $\{١\}$

(٢١٦) يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $٨ - ٩ = ٢$ حيث ٢

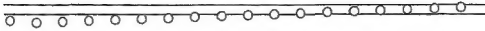
المسافة بالأمطار، الزمن بالثواني، متى يتوقف الجسم عن الحركة.

$\{٤ ثواني\}$

$$(٢١٧) إذا كان $ق(س) = (س - ٥) + (س - ٥) = ٥$ أوجد $\frac{دق}{دس}$$$

(٢١٨) بالون كروي الشكل ازداد حجمه من ٣٦π سم^٣ إلى ٥٠π سم^٣ بمدة ١٠

ثواني، ما معدل ازدياد نصف قطره خلال هذه المدة.



(٢١٩) دُفِعَ جسم ساكن بقوة مناسبة تتحرك على خط مستقيم حسب العلاقة $f =$

$32 - t^2$ حيث f المسافة بالأمطار، t الزمن بالثواني، بعد كم ثانية

يخلد الجسم إلى السكون مرة أخرى.

{ بعد ٢ ثانية }

$$(220) \text{ إذا كان ق (س) } = 2س^2 - 4س + 72 \text{ أوجد نها } \frac{ق(1) - ق(0)}{1 - 0}$$

{ ١٢ }

(٢٢١) إذا كان ق (س) = ك س - ٣ و كان متوسط التغير في الفترة [١، ٢] هو

١٢ ما قيمة ك؟

(٢٢٢) إذا كان العمودي على المماس لمنحنى $ص = ج(س - ٢)$ يمر بنقطة الأصل

{ $\frac{1}{10.8}$ }

عند $س = ١$ فما قيمة ج.

$$(223) \text{ إذا كانت } ص = \sqrt{ج} \text{ ، } ج = ٩ \text{ ، } \sqrt{س} \text{ أوجد } \frac{دص}{دس} \bigg|_{س=٩} = \frac{\pi}{٧}$$

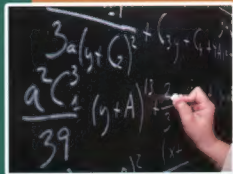
{ صفر }

(٢٢٤) بين أن المماسين لمنحنى ق (س) = $\frac{1}{س}$ ، هـ (س) = س متعامدان عند نقطة

تقاطعهما.

إرشاد: أوجد نقطة التقاطع أولاً

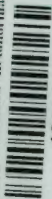
- (١) أ. ج. مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.
- (٢) إيرل و. سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.
- (٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة"، جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧١ م.
- (٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية" مكتبة بغداد - عمان، ١٩٩٤ م.
- (٥) شارلز سولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.
- (٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.
- (٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي"، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.
- (٨) عبد الرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع - عمان، ١٩٨٢ م.
- (٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات"، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.
- (١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.
- (١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا - موسكو، ١٩٧٥ م.
- (١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣ م.
- (١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة"، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.
- (١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.
- (١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.
- (١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهج التربية والتعليم الأردني"، ٢٠٠٧ م.
- (١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة

النمايات والاتصال
التفاضل وتطبيقاته

Bibliotheca Alexandrina



1213165



دارأسامة

للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658252 / 00962 6 5658253

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net